МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования “Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского”

Е.Л. Панкратов
Е.А. Булаева

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Учебно-методическое пособие
по курсу «Математический анализ»

Рекомендовано методической комиссией Института экономики и предпринимательства ННГУ для студентов, обучающихся по направлению подготовки 38.03.02 «Менеджмент»

Нижний Новгород
2016

УДК 517.958 (075)
ББК В311
П-16

П-16 МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ: Автор: Панкратов Е.Л., Булаева Е.А. учебно-методическое пособие. - Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2016. - 48 с.

Рецензент: доцент кафедры математических и естественно-научных дисциплин ВВФ МТУСИ к.ф.-м.н., доцент **А.Е. Шахов**

Учебно-методическое пособие «Математический анализ» подготовлено для ознакомления студентов, обучающихся по специальности 38.03.02 «Менеджмент», с соответствующим разделом курса «Математический анализ». Оно содержит основные понятия теории функций, дифференциального исчисления и применением дифференциального исчисления к исследованию функций. Для закрепления теоретических знаний по математическому анализу в данном пособии приведены контрольные задания.

Ответственная за выпуск:
председатель методической комиссии Института экономики и предпринимательства, **Е.Н. Летягина**.

УДК 517.958 (075)
ББК В311

Содержание

Введение

В настоящее время имеется большое количество экономических задач для описания которых необходим функциональный анализ и дифференциальное исчисление. В данном пособии основные понятия теории функций, дифференциального исчисления и применением дифференциального исчисления к исследованию функций. Для закрепления теоретических знаний по математическому анализу в данном пособии приведены контрольные задания. Пособие ориентировано на развитие у студентов компетенции ОПК-6 федерального государственного стандарта специальности 38.03.02 «Менеджмент». В результате изучения раздела “Математический анализ” дисциплины “Математика” студенты должны знать основные понятия теории функций, дифференциального исчисления и применением дифференциального исчисления к исследованию функций, уметь решать практические задачи по данным темам.

1. *Основные понятия теории множеств. Высказывания*

Определение 1

Под множеством понимается объединение в одно общее однозначно различимых объектов.

Определение 2

Образующие множество объекты называются элементами множества.

Если элемент m принадлежит множеству M, то используется следующее обозначение: $m \in M$.

Определение 3

Множество, содержащее конечное число объектов, называется конечным. Если множество не содержит ни одного объекта, то оно называется пустым и обозначается $\varnothing$.

Способы задания множеств

Множество может быть задано перечислением элементов (конечное множество) или указанием их свойств (при этом для задания множеств используются фигурные скобки {}).

Пример 1

Множество M цифр десятичного алфавита можно задать в виде $M=\{0,1,\dots,9\}$ или $M=\{i/i$ – целое, $0 \le i \le 9\}$.

Определение 4

Множество M_1 называется подмножеством множества M, когда любой элемент множества M_1 принадлежит множеству M. Такая принадлежность обозначается следующим образом: $M_1 \subset M$.

Определение 5

Если множество M_1 является подмножеством множества M_2, множество M_2 - подмножеством множества M_1, то оба этих множества состоят из одних и тех же элементов и называются равными.

Определение 6

Объединением множеств M_1 и M_2 (обозначается $M_1 \cup M_2$) является множество M, состоящее из элементов множества M_1 и элементов множества M_2.

Определение 7

Пересечением множеств M_1 и M_2 (обозначается $M_1 \cap M_2$) является множество M, состоящее из элементов, которые принадлежат как множеству M_1, так и множеству M_2.

Определение 8

Разностью $M_1 \backslash M_2$ множеств M_1 и M_2 является множество M, состоящее из элементов, принадлежащих множеству M_1 и не принадлежащих множеству M_2.

Определение 9

Дополнением M_3 множества M является множество $M_3\{M_1 \backslash M_2\}$.

Используя последние четыре операции можно выражать одни множества через другие. При этом сначала выполняется одноместная операция дополнения, далее – двуместная операция пересечения, в заключении - двуместные операции объединения и разности.

Определение 10

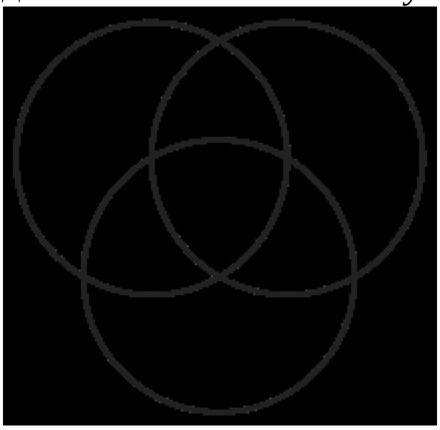
Мощность множества, кардинальное число множества - характеристика множеств, определяющее количество (число) элементов конечного множества.

Диаграммы Эйлера-Венна

Диаграммы Эйлера-Венна - схематичное изображение всех возможных пересечений нескольких (часто - трёх) множеств. Диаграммы Эйлера-Венна - изображают все 2^n комбинаций n свойств. При n=3 диаграмма Эйлера - Венна обычно изображается в виде трёх кругов с центрами в вершинах равностороннего треугольника и одинаковым радиусом, приблизительно равным длине стороны треугольника.

Определение 11

Пусть даны два множества X и Y. Прямое (декартово) произведение множества X и множества Y есть такое множество $X\times Y$, элементами которого являются упорядоченные пары (x,y) для всевозможных $x\in X$ и $y\in Y$.



Пример диаграммы Эйлера - Венна

Определение 12

Высказыванием называется повествовательное предложение, о котором можно сказать в данный момент, что оно истинно или ложно, но не то и другое одновременно.

“Истинность” или “ложность” предложения является истинным значением высказывания. Поставим в соответствие каждому высказыванию переменную, равную 1, если высказывание истинно, и равную нулю, если ложно. Если x_1 и x_2 – некоторые высказывания, то можно образовать высказывания x_1 или x_2, x_1 и x_2, не x_1, не x_2, введя операции дизъюнкции, конъюнкции и отрицания (т.е., соответственно, “ИЛИ”, “И”, “НЕ”).

Операции над высказываниями

Определение 13

Пусть P - высказывание, определённое на Ω. Отрицанием высказывания P называется высказывание (обозначение P или $\overline{P}$), введённое следующим образом

$$(\neg P)(x_1, x_2, ..., x_n) \equiv \overline{P(x_1, x_2, ..., x_n)}.$$

Определение 14

Пусть P и Q - определённые на Ω высказывания. Импликацией высказываний P и Q называется высказывание (обозначение $P\to Q$, $P\supset Q$, $P\Rightarrow Q$), введённое следующим образом

$$(P\to Q)(x_1,x_2,\ldots,x_n)\equiv P(x_1,x_2,\ldots,x_n)\to Q(x_1,x_2,\ldots,x_n).$$

В простейшем случае двух высказываний P и Q импликации приведённая ниже таблица истинности

Q	P	$P\to Q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Табл. 1.

Высказывания, образующие импликацию, имеют специальные названия: P - посылка (гипотеза, антецедент), Q – заключение (вывод, консеквент). Для иллюстрации данного высказывания рассмотрим следующий пример.

Пример 2

Если натуральное число x делится на 4, то оно делится и на 2.

Определение 15

Пусть P и Q - определённые на Ω высказывания. Эквиваленцией данных высказываний P и Q называется следующее высказывание (обозначение $P\sim Q$, $P\leftrightarrow Q$)

$$(P\sim Q)(x_1,x_2,\ldots,x_n)\equiv P(x_1,x_2,\ldots,x_n)\sim Q(x_1,x_2,\ldots,x_n).$$

В простейшем случае двух высказываний P и Q эквиваленции соответствует приведённая ниже таблица истинности

Q	P	$P\leftrightarrow Q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Табл. 2.

Таким образом, эквиваленция $P\sim Q$ истинна только тогда, когда её высказывания P и Q имеют одинаковые значения истинности.

Определение 16

Пусть P и Q - определённые на Ω высказывания. Дизъюнкцией высказываний P и Q называется высказывание (обозначение $P\vee Q$), введённое следующим образом

$$(P\vee Q)(x_1,x_2,\ldots,x_n)\equiv P(x_1,x_2,\ldots,x_n)\vee Q(x_1,x_2,\ldots,x_n).$$

В простейшем случае двух высказываний P и Q дизъюнкции соответствует приведённая ниже таблица истинности

Q	P	$P\vee Q$
0	0	0

0	1	1
1	0	1
1	1	1

Табл. 3.

<u>Определение 17</u>

Пусть P и Q - определённые на Ω высказывания. Конъюнкцией высказываний P и Q называется высказывание (обозначение $P\wedge Q$, $P\&Q$), введённое следующим образом

$$(P\wedge Q)(x_1,x_2,\ldots,x_n)\equiv P(x_1,x_2,\ldots,x_n)\wedge Q(x_1,x_2,\ldots,x_n).$$

В простейшем случае двух высказываний P и Q дизъюнкции соответствует приведённая ниже таблица истинности

Q	P	$P\wedge Q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Табл. 4.

<u>Определение 18</u>

Высказывания P и Q, определённые на Ω, называются равносильными (обозначение $P\equiv Q$), если они тождественны друг другу для любого набора предметных переменных $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ из Ω.

Рассмотрим высказывания P, Q и R. Для операций над ними справедливы следующие свойства (законы)

1) $P\equiv P$ 2) $P\vee Q\equiv Q\vee P$ 3) $P\wedge Q\equiv Q\wedge P$ 4) $P\vee P\equiv P$
5) $P\wedge P\equiv P$ 6) $P\vee 1\equiv 1$ 7) $P\wedge 0\equiv 0$ 8) $P\vee 0\equiv 0$
9) $P\wedge 1\equiv P$ 10) $P\vee P\equiv 1$ 11) $P\wedge P\equiv 0$ 12) $(P\vee Q)\equiv (P)\vee(Q)$
13) $(P\wedge Q)\equiv(P)\wedge(Q)$ 14) $P\vee(Q\vee R)\equiv(P\vee Q)\vee R\equiv P\vee Q\vee R$
15) $P\wedge(Q\wedge R)\equiv(P\wedge Q)\wedge R\equiv P\wedge Q\wedge R$ 16) $P\wedge(Q\vee R)\equiv(P\wedge Q)\vee(P\wedge R)$

2. ***Функции и способы их задания***

<u>Определение 19</u>

Если переменной x по определённому закону ставится в соответствие другая переменная y, то считается, что задана функция y аргумента x. Формы обозначения: $y=y(x)$ или $y=f(x)$. Значение y называется частным значением функции y в точке x. f иногда называют характеристикой функции $y=f(x)$. Множество, состоящее из тех и только тех чисел, которые являются значениями независимой переменной x, обычно называют областью задания функции. Описания областей задания функции требует развития теории числовых множеств.

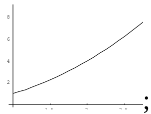
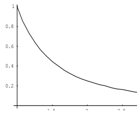
Способы задания функций

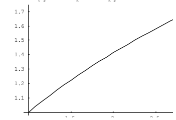
Функция может быть определена таблицей своих значений или правилом вычисления такой таблицы с помощью известных операций (конструктивные определения). Функция может быть определена также неявно $F(x,y)=0$ или с помощью определяющих свойств, описываемых функциональными, дифференциальными или интегральными уравнениями, экстремальными свойствами, поведением при некоторых значениях аргумента и т.д. Каждое неконструктивное определение нуждается в доказательстве существования, устанавливающем, что функция, обладающая данными свойствами, существует.

Основные элементарные функции

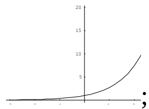
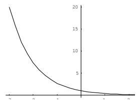
К основным элементарным функциям можно отнести следующие:

Степенная функция x^a

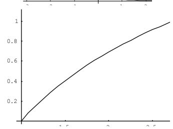
$a \geq 1$  ; $a \leq -1$ 

$|a| < 1$ 

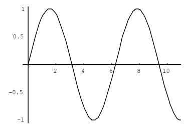
Показательная функция a^x

$a > 1$  ; $a < 1$ 

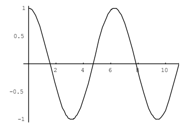
Логарифмическая функция $log_a(x)$



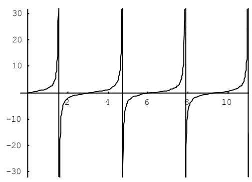
Тригонометрический синус $sin(x)$



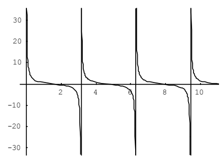
Тригонометрический косинус $cos(x)$



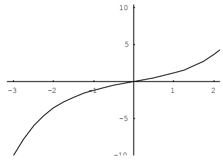
Тригонометрический тангенс $tg(x)$



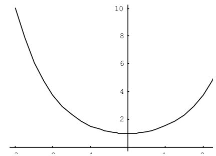
Тригонометрический катангенс $ctg(x)$

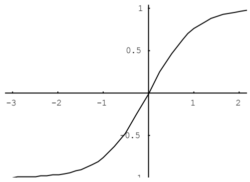
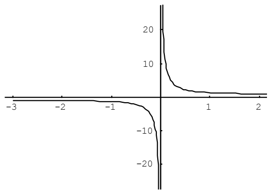
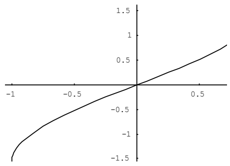
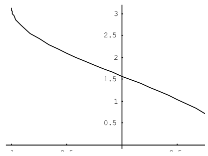
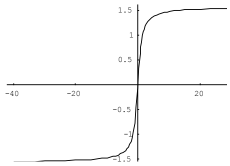
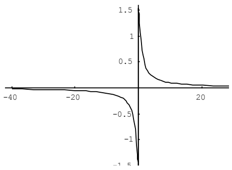
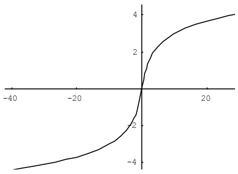
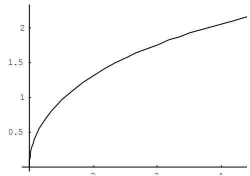
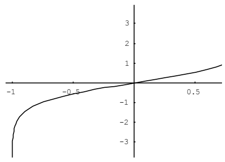
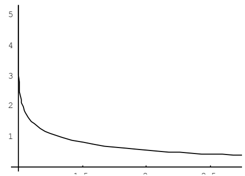


Гиперболический синус $sh(x)$



Гиперболический косинус $ch(x)$



Гиперболический тангенс	$th(x)$	
Гиперболический катангенс	$cth(x)$	
Арксинус	$arcsin(x)$	
Арккосинус	$arccos(x)$	
Арктангенс	$arctg(x)$	
Арккатангенс	$arcctg(x)$	
Ареа-синус	$arsh(x)$	
Ареа-косинус	$arch(x)$	
Ареа-тангенс	$arth(x)$	
Ареа-катангенс	$arcth(x)$	

3. ***Предел числовой последовательности***

Определение 20

Если каждому значению n из натурального ряда 1, 2, …, n, … ставится в соответствие по определённому закону некоторое вещественное число x_n, то множество занумерованных вещественных чисел

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$$

назовём (числовой) последовательностью.

Определение 21

Отдельные числа x_n называются элементами (членами) последовательности.

Для сокращения формы записи используется символ $\{x_n\}$.

Пример 3

Развёрнутая форма записи последовательности $\{1/n^2\}$ имеет вид:

$$1, 1/4, 1/9, \ldots, 1/n^2, \ldots$$

Пример 4

Развёрнутая форма записи последовательности $\{1+(-1)^n\}$ имеет вид:

$$0, 2, 0, 2, \ldots$$

Примерами числовых последовательностей являются арифметические и геометрические прогрессии; последовательность периметров правильных n-угольников, вписанных в данную окружность; последовательность рациональных чисел x_1=0,3; x_2=0,33; x_3=0,333; …, приближающих число 1/3.

Определение 21

Последовательность $\{x_n\}$ называется ограниченной сверху (снизу), если существует вещественное число M (m) такое, что каждый элемент этой последовательности x_n удовлетворяет неравенству $x_n \le M$ ($x_n \ge m$). При этом число M (m) называется верхней (нижней) гранью последовательности $\{x_n\}$, а неравенство $x_n \le M$ ($x_n \ge m$) называется условием ограниченности последовательности сверху (снизу).

Определение 22

Последовательность $\{x_n\}$ называется сходящейся, если существует такое вещественное число a, что для любого положительного вещественного числа ε найдётся номер N такой, что при всех $n \ge N$ элементы x_n этой последовательности удовлетворяют условию:

$$|x_n - a| < \varepsilon.$$

При этом число a называется пределом последовательности. Обозначение:

$$\lim_{n \to n_0} x_n = a.$$

Пример 3

Найдём предел последовательности $\{1/n^2\}$: $\lim\limits_{n \to \infty} n^{-2} = 0$.

Пример 4

Найдём предел последовательности $\left\{n^4 \exp\left(-n^2\right)+\frac{1}{\sqrt[3]{2+2n-4n^5}}\right\}$

$$\lim_{n\to\infty}\left[n^4 \exp\left(-n^2\right)+\frac{1}{\sqrt[3]{2+2n-4n^5}}\right]=0.$$

Пример 5

Найдём предел последовательности $\left\{\frac{(n+1)^3-(n-1)^3}{(n+1)^2+(n-1)^2}\right\}$

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{(n+1)^3-(n-1)^3}{(n+1)^2+(n-1)^2}\right]=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^3+3n^2+3n+1-n^3+3n^2-3n+1}{n^2+2n+1+n^2-2n+1}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{6n^2+2}{2n^2+2}\right)=3.$$

Предел функции

Определение 23

Функция $f(x)$ имеет предел $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$ при x, стремящемся к конечному значению $x=a$, если для каждого положительного числа ε существует такое положительное число δ, что при $0<|x-a|<\delta$ функция $f(x)$ определена и $|f(x)-L|<\varepsilon$.

Свойства пределов

Если пределы в правой части следующих равенств существуют, то существуют пределы и в левой части равенств. Также выполняются следующие равенства:

1) $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)+g(x)\right]=\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)\right]+\lim\limits_{x\to a}\left[g(x)\right]$; 2) $\lim\limits_{x\to a}\left[\alpha f(x)\right]=\alpha\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)\right]$;

3) $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)\cdot g(x)\right]=\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)\right]\cdot\lim\limits_{x\to a}\left[g(x)\right]$; 4)

$\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)/g(x)\right]=\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)\right]\Big/\lim\limits_{x\to a}\left[g(x)\right]$, $\lim\limits_{x\to a}\left[g(x)\right]\neq 0$.

Величина a может быть как конечной, так и бесконечной. Рассмотренные свойства применимы и к пределам последовательностей, и к функциям нескольких переменных.

Важнейшие пределы

1) $\lim\limits_{x\to 0}\left[\sin(x)/x\right]=1$. Данный предел (называемый первым замечательным пределом) выполняется, если x – длина дуги или угол, выраженный в радианах;

2) $\lim\limits_{x\to\infty}(1+1/x)^x=e=2{,}71828$. Данный предел называется вторым замечательным пределом;

3) $C=\lim\limits_{n\to\infty}\left[1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}-\ln(n)\right]\approx 0{,}5772$ - постоянная Эйлера.

Вычисление пределов

Для вычисления пределов используются следующие методы:

1) применение рассмотренных ранее свойств пределов:

Пример 6

Найдём предел функции $f(x)=\sin(2x)/x$ при $x\to 0$. Перед вычислением предела предварительно преобразуем данную функцию путём умножения числителя и знаменателя на 2. Тогда получаем удвоенный первый замечательный предел:

$$2\lim_{x\to 0}\frac{\sin(2x)}{2x}=2;$$

2) преобразование функции к тому виду, для которого нахождение предела не вызывает трудностей:

Пример 7

Найдём предел функции $f(x)=(x^3-1)/(x-1)$ при $x\to 1$. Перед вычислением предела предварительно упростим данную функцию путём деления полинома в числителе на полином в знаменателе. В результате такого деления получаем: $f|(x)=x^2+x+1$. Тогда:

$$\lim_{x\to 1}\left(x^2+x+1\right)=3.$$

Пример 8

Найдём предел функции $f(x)=\left(\sqrt{1+x}-1\right)/x$ при $x\to 0$. Перед вычислением предела предварительно преобразуем данную функцию путём умножения числителя и знаменателя на $\sqrt{1+x}+1$. Тогда:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{1+x}-1\right)\left(\sqrt{1+x}+1\right)}{x\left(\sqrt{1+x}+1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{1+x}+1}=\frac{1}{2};$$

3) для раскрытия неопределённостей $0/0$, ∞/∞, $0\times\infty$, ∞^0, 1^∞ использование правила Лопиталя. Данное правило заключается в следующем. Пусть необходимо вычислить предел функции $f(x)$ (например, $y(x)=f(x)/g(x)$), являющийся одной из неопределённостей. Тогда

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{d\,f(x)/d\,x}{d\,g(x)/d\,x}.$$

Для доказательства данного соотношения будем считать, что $f_1(a)=0$ и $f_2(a)=0$ и рассмотрим следующее отношение

$$[f(x)-g(a)]/[f(x)-g(a)].$$

Тогда между точками a и x найдётся точка c ($a<c<x$), в которой

$$\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\frac{d\,f(x=c)/d\,x}{d\,g(x=c)/d\,x}.$$

Когда $x\to a$ одновременно и $c\to a$ по этой причине выполняется и последнее соотношение для пределов.

Пример 9

Рассмотрим предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=1.$$

Применение правила Лопиталя позволяет получить:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)}{1}=1.$$

Пример 10

Рассмотрим предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-e^{-x}}{\sin(x)}=\frac{0}{0}.$$

Применение правила Лопиталя позволяет получить:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-e^{-x}}{\sin(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}+e^{-x}}{\cos(x)}=2.$$

Пример 11

Рассмотрим предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln[\sin(2x)]}{\ln[\sin(x)]}=\frac{\infty}{\infty}.$$

Применение правила Лопиталя позволяет получить:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln[\sin(2x)]}{\ln[\sin(x)]}=\lim_{x\to 0}\frac{2\cos(2x)/\sin(2x)}{\cos(x)/\sin(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{2\,ctg(2x)}{ctg(x)}=\frac{\infty}{\infty}.$$

Вторичное применение правила Лопиталя позволяет получить:

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\,ctg(2x)}{ctg(x)}\equiv\lim_{x\to 0}\frac{2\,tg(x)}{tg(2x)}=\lim_{x\to 0}\frac{2/\cos^2(x)}{2/2\cos^2(2x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2(2x)}{\cos^2(x)}=1.$$

Пример 12

Рассмотрим функцию, предел которой является разностью бесконечных пределов. Путём алгебраических преобразований разность таких пределов преобразуется к неопределённостям 0/0 или ∞/∞.

$$\lim_{x\to 1}\left[\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln(x)}\right].$$

Приводим данное соотношение к общему знаменателю:

$$\lim_{x\to 1}\left[\frac{x\ln(x)-x+1}{x\ln(x)-\ln(x)}\right]=\frac{0}{0}.$$

Двухкратное применение правила Лопиталя позволяет получить:

$$\lim_{x\to 1}\left[\frac{x\ln(x)-x+1}{x\ln(x)-\ln(x)}\right]=\lim_{x\to 1}\left[\frac{\ln(x)}{\ln(x)+1-1/x}\right]=\lim_{x\to 1}\left(\frac{1/x}{1/x+1/x^2}\right)=\frac{1}{2}.$$

<u>Пример 13</u>

Рассмотрим неопределённость $0\times\infty$. В этом случае произведение $f(x)=f(x)g(x)$ преобразуется к виду: $f(x)=f(x)/[1/g(x)]$ для получения неопределённости 0/0 или ∞/∞.

$$\lim_{x\to\pi/2}(\pi-2x)\,tg(x)=0\times\infty.$$

Преобразуем данное соотношение к следующему виду:

$$\lim_{x\to\pi/2}(\pi-2x)\,tg(x)=\lim_{x\to\pi/2}\frac{\pi-2x}{ctg(x)}.$$

Далее применяем правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to\pi/2}\frac{\pi-2x}{ctg(x)}=\lim_{x\to\pi/2}\frac{-2}{-1/\sin^2(x)}=2.$$

<u>Пример 14</u>

Рассмотрим неопределённость 0^0, ∞^0, 1^∞. Если $f(x)=[f_1(x)]^{f_2(x)}$ и $f_1(a)=f_2(a)=0$, то сначала находят $\ln[f(x)]=f_2(x)\cdot\ln[f_1(x)]$, что приводит к виду $0\times\infty$. Далее, найдя предел А данного выражения, полученный результат можно потенцировать, т.е. находим e^A.

Например,

$$\lim_{x\to 0}x^x=A;\ \ln\left(x^x\right)=x\ln(x);\ \lim_{x\to 0}[x\ln(x)]=\lim_{x\to 0}\left[\frac{\ln(x)}{1/x}\right].$$

Далее по правилу Лопиталя раскрываем неопределённость. Тогда:

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{\ln(x)}{1/x}\right]=\lim_{x\to 0}(-x)=0=\ln(A).$$

Тогда: $A=e^0=1$. В случаях ∞^0, 1^∞ поступают аналогично.

<u>Пример 15</u>

Рассмотрим предел

$$\lim_{x\to 0}x^{-tg(x)}=A;\ \lim_{x\to 0}\left\{\ln\left[x^{-tg(x)}\right]\right\}=-\lim_{x\to 0}[tg(x)\ln(x)]=-\lim_{x\to 0}\left[\frac{\ln(x)}{ctg(x)}\right].$$

Далее по правилу Лопиталя раскрываем неопределённость. Тогда:

$$-\lim_{x\to 0}\left[\frac{\ln(x)}{ctg(x)}\right]=\lim_{x\to 0}\left[\frac{\sin^2(x)}{x}\right]=\frac{0}{0}.$$

Вторичное применение правила Лопиталя позволяет получить:

$$\lim_{x\to 0}\left[\sin^2(x)/x\right]=\lim_{x\to 0}\left[2\sin(x)\cos(x)/1\right]=0=\ln(A).$$

Тогда $A=e^0=1$.

Пример 16

Рассмотрим предел

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{2x}\right)^x=A;\ \lim_{x\to\infty}\left[\ln\left(1+\frac{1}{2x}\right)^x\right]=\lim_{x\to\infty}\left[x\ln\left(1+\frac{1}{2x}\right)\right]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{\ln(1+1/2x)}{1/x}\right].$$

Далее по правилу Лопиталя раскрываем неопределённость. Тогда:

$$\lim_{x\to\infty}\left[\frac{\ln(1+1/2x)}{1/x}\right]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{1}{1+1/2x}\left(-\frac{1}{2x^2}\right)\Big/\left(-\frac{1}{x^2}\right)\right]=\frac{1}{2}\lim_{x\to\infty}\left[1\Big/\left(1+\frac{1}{2x}\right)\right]=\frac{1}{2}=\ln(A).$$

Тогда $A=\sqrt{e}$.

4. *Бесконечно малые и бесконечно большие величины*

Определения бесконечно малых и бесконечно больших величин

Определение 24

Функция $\alpha(x)$ называется бесконечно малой в точке a, если предел данной функции в точке a равен нулю.

Пример 17

Примером бесконечно малой в точке a функции может служить $\alpha(x)=(x-a)^n$, где n – любое положительное число.

Следует заметить, что если функция $f(x)$ имеет предел в точке a, равный числу b, то функция $\alpha(x)=f(x)-b$ является бесконечно малой в точке a. Такое утверждение приводит к следующему представлению для функции $f(x)$, имеющей предел, равный b предел в точке a:

$$f(x)=b+\alpha(x),$$

где $\alpha(x)$ – бесконечно малая в точке a функция. Такое представление удобно в теории пределов. Введём теперь понятие бесконечно большой в данной точке a справа (или слева) функции.

Определение 25

Функция $A(x)$ называется бесконечно большой в точке a справа (слева), если для любой сходящейся к a последовательности $\{x_n\}$ значений аргумента, все элементы которой больше a (меньше a), соответствующая последовательность значений функций $\{A(x_n)\}$ является бесконечно большой последовательностью, все элементы которой, начиная с некоторого номера, либо положительны, либо отрицательны.

Для бесконечно больших в точке a справа (слева) функций используется следующая символика:

$$\lim_{x\to a+0}\mathrm{A}(x)=+\infty\ (\lim_{x\to a-0}\mathrm{A}(x)=+\infty),$$

или

$$\lim_{x\to a+0} \mathrm{A}(x) = -\infty \ (\lim_{x\to a-0} \mathrm{A}(x-0) = -\infty).$$

Иногда используются более компактные обозначения:

$$\mathrm{A}(x+a) = +\infty, \ (\mathrm{A}(a-0) = +\infty),$$

или

$$\mathrm{A}(x+a) = -\infty, \ (\mathrm{A}(a-0) = -\infty).$$

Сравнение бесконечно малых и бесконечно больших величин

Далее остановимся на методике сравнения двух бесконечно малых в данной точке a функций. Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ - две функции, заданные для одних и тех же значений аргумента и обе являются бесконечно малыми в данной точке a.

Определение 26

$\alpha(x)$ называется бесконечно малой более высокого порядка $\beta(x)$ в точке a (имеет в точке a более высокий порядок малости, чем $\beta(x)$), если

$$\lim_{x\to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0.$$

Определение 27

$\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называется бесконечно малыми одного порядка в точке a (имеют в точке a одинаковы порядок малости), если

$$\lim_{x\to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = b,$$

где b – конечное число.

Определение 28

$\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называется эквивалентными бесконечно малыми в точке a, если

$$\lim_{x\to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1.$$

Для обозначения того, что $\alpha(x)$ является в данной точке бесконечно малой более высокого порядка, чем $\beta(x)$, используется следующая запись:

$$\alpha = o(\beta).$$

Таким образом, $o(\beta)$ обозначает любую бесконечно малую в данной точке a функцию, имеющую в этой точке более высокий порядок малости, чем бесконечно малая в той же точке функция $\beta(x)$. Из определения символа $o(\beta)$ вытекают следующие его свойства:

1) $o(\beta)+o(\beta)=o(\beta)$, $o(\beta)-o(\beta)=o(\beta)$;
2) если $\gamma=o(\beta)$, то $o(\beta)+o(\gamma)=o(\beta)$;
3) если α и β - любые две бесконечно малые в данной точке функции, то $\alpha\cdot\beta=o(\alpha)$ и $\alpha\cdot\beta=o(\beta)$.

Аналогично сравниваются две бесконечно большие в данной точке a справа (или слева) функции. Пусть $A(x)$ и $B(x)$ определены для одних и тех же значений аргумента и для определённости

$$\lim_{x\to a+0} \mathrm{A}(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to a+0} \mathrm{B}(x) = +\infty.$$

<u>Определение 29</u>

$A(x)$ имеет в точке a справа более высокий порядок роста, чем $B(x)$, если

$$\lim_{x\to a+0} \frac{\mathrm{A}(x)}{\mathrm{B}(x)} = +\infty.$$

<u>Определение 30</u>

$A(x)$ и $B(x)$ имеют в точке a одинаковый порядок роста, если

$$\lim_{x\to a+0} \frac{\mathrm{A}(x)}{\mathrm{B}(x)} = b,$$

где b – конечное число.

Рассмотрим несколько примеров сравнения бесконечно малых и бесконечно больших функций.

<u>Пример 18</u>

Функции $\alpha(x)=x^3-x^5$ и $\beta(x)=5x^3+x^4$ являются в точке $x=0$ бесконечно малыми одного порядка, т.к.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3 - x^5}{5x^3 + x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{1-x^2}{5+x} = \frac{1}{5}.$$

<u>Пример 19</u>

Функции $\alpha(x)=(x-2)^2\cdot(x-1)$ и $\beta(x)=(x-2)^2$ являются в точке $x=2$ эквивалентными бесконечно малыми, т.к.

$$\lim_{x\to 2} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)^2(x-1)}{(x-2)^2} = \lim_{x\to 2} (x-1) = 1.$$

<u>Пример 20</u>

Функции $A(x)=(x+2)/x$ и $B(x)=1/x$ являются в точке $x=0$ бесконечно большими одинакового порядка роста как справа, так и слева, т.к.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{A}(x)}{\mathrm{B}(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{(x+2)^2/x}{x} = \lim_{x\to 0} (x+2)^2 = 2.$$

Аналогично определяются и сравниваются функции, бесконечно малые или бесконечно большие при $x\to\pm\infty$.

5. *Непрерывность функции*

<u>Определение 31</u>

Функция $f(x)$, определённая в некоторой окрестности точки $x=a$, непрерывна в точке $x=a$, если предел $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ существует и равен $f(a)$, т.е. если для каждого положительного числа ε существует такое положительное число δ, что при $|x-a|<\delta$ выполняется неравенство $|f(x)-f(a)|<\varepsilon$. В противном случае функция $f(x)$ в точке $x=a$ имеет разрыв.

Таким образом, что бы функция считалась непрерывной в точке $x=a$, она должна удовлетворять следующим условиям:

1) $f(x)$ должна быть определена в некоторой окрестности точки $x=a$;

2) должны существовать конечные пределы $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$;

3) пределы $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$ должны быть одинаковыми;

4) пределы $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$ должны быть равны $f(a)$.

Классификация точек разрыва

1. Устранимый разрыв

<u>Определение 32</u>

Точка $x=a$ называется точкой устранимого разрыва функции $f(x)$, если предел функции $f(x)$ в точке $x=a$ существует, но в данной точке рассматриваемая функция или не определена, или имеет частное значение $f(a)$, отличное от предела $f(x)$ в точке $x=a$.

<u>Пример 21</u>

Функция

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin(x)}{x}, & x\neq 0\\ 0{,}5 & x=0\end{cases}$$

имеет в точке $x=0$ устранимый разрыв. Функция $f(x)$ задана таким образом, что её предельное значение в точке $x=0$ равно 0,5, а не 1.

Если функция $f(x)$ имеет в точке $x=a$ устранимый разрыв, то этот разрыв можно устранить, не изменяя при этом значений функции в точке $x=a$. Для этого достаточно положить значение функции в точке $x=a$ равным её предельному значению в этой точке. Так, в рассматриваемом примере достаточно положить $f(0)=1$ и тогда $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(x)}{x}=f(0)=1$, т.е. функция $f(x)$ станет непрерывной в точке $x=0$.

В физических процессах точки устранимого разрыва встречаются при сосредоточенных распределениях физических величин.

2. Разрыв первого рода (конечный разрыв)

<u>Определение 33</u>

Точка $x=a$ называется точкой разрыва первого рода, если в этой точке функция $f(x)$ имеет конечные, но не равные друг другу правый и левый пределы, т.е.

$$\lim_{x\to a+0} f(x)\neq \lim_{x\to a-0} f(x),\ \lim_{x\to a+0} f(x)\neq\infty,\ \lim_{x\to a-0} f(x)\neq\infty.$$

Такой разрыв можно назвать конечным скачком (разрывом).

Пример 22

Рассмотрим функцию

$$f(x) = \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}.$$

Данная функция в точке x=0 имеет разрыв первого рода. Что бы это проверить, вычислим правый и левый пределы:

$$\lim_{x\to 0+0} \operatorname{sgn}(x) = 1,\ \lim_{x\to 0-0} \operatorname{sgn}(x) = -1,\ 1\neq-1.$$

Неравенство друг другу обоих пределов подтверждает, что рассмотренная функция имеет разрыв первого рода.

Пример 23

Рассмотрим функцию

$$f(x) = sin(x)/|x|.$$

Данная функция в точке x=0 имеет разрыв первого рода. Что бы это проверить, вычислим правый и левый пределы:

$$\lim_{x\to 0+0} \frac{\sin(x)}{|x|} = 1,\ \lim_{x\to 0-0} \frac{\sin(x)}{|x|} = -1,\ 1\neq-1.$$

Последнее соотношение подтверждает, что рассмотренная в данном примере функция имеет разрыв первого рода в точке x=0.

Пример 24

Рассмотрим функцию

$$f(x) = \frac{1}{1+2^{1/x-1}}.$$

Данная функция в точке x=0 имеет разрыв первого рода. Что бы это проверить, вычислим правый и левый пределы:

$$\lim_{x\to 0+0} f(x) = 1,\ \lim_{x\to 0-0} f(x) = 0,\ 1\neq0.$$

Последнее соотношение подтверждает, что рассмотренная в данном примере функция имеет разрыв первого рода в точке x=1.

3. Разрыв второго рода (бесконечный разрыв)

Определение 34

Точка $x=a$ называется точкой разрыва второго рода, если в этой точке функция $f(x)$ не имеет хотя бы одного из односторонних пределов или если один из односторонних пределов бесконечен.

$$\lim_{x\to a+0} f(x) \neq \lim_{x\to a-0} f(x),\ \lim_{x\to a+0} f(x) = \infty \text{ или } \lim_{x\to a-0} f(x) = \infty.$$

Такой разрыв можно назвать бесконечным скачком (разрывом).

Пример 25

Рассмотрим функцию

$$f\left(x\right)=\begin{cases} x\cdot\cos\left(1/x\right), & x<0 \\ 0 & x=0 \\ \cos\left(1/x\right), & x>0 \end{cases}.$$

Данная функция имеет равный нулю левый предел и не имеет правого предела.

Пример 26

Рассмотрим функцию

$$f(x)=tg(x).$$

Данная функция в точках $x_k=\pi(k+0,5)$ имеет разрыв второго рода. Что бы это проверить, вычислим правый и левый пределы:

$$\lim_{x\to x_k-0} f\left(x\right)=+\infty,\ \lim_{x\to x_k+0} f\left(x\right)=-\infty,\ -\infty\neq+\infty.$$

Последнее соотношение подтверждает, что рассмотренная в данном примере функция имеет разрыв второго рода в точках $x_k=\pi(k+0,5)$.

Пример 27

Рассмотрим функцию

$$f\left(x\right)=\begin{cases} \sin\left(1/x\right), & x\neq 0 \\ 1 & x=0 \end{cases}.$$

Рассмотренная функция в точке x=0 не имеет на правого, ни левого пределов. По этой причине данная точка является точкой разрыва второго рода.

6. *Производная функции*

Задачи, приводящие к понятию производной

Проведём анализ нескольких задач.

1. Задача о вычислении скорости движущейся точки

Рассмотрим свободное падение тяжёлой материальной точки. Если время t отсчитывается от начала падения, то пройденный за это время путь s определяется с помощью известного соотношения: $s=gt^2/2$, где g=9,81 - ускорение свободного падения. Исходя из данного соотношения, определим скорость движения v в данный момент времени t, когда точка находится в положении M. Увеличим время t на приращение Δt и рассмотрим момент $t+\Delta t$, когда точка будет в положении M_1. Приращение MM_1 пути за промежуток времени Δt обозначим как Δs. Подставляя $t+\Delta t$ вместо t в исходное соотношение для s. Тогда: $s+\Delta \mathrm{s}=\mathrm{g}(\mathrm{t}+\Delta \mathrm{t})^2/2$.

$$s+\Delta s=g(t+\Delta t)^2/2.$$

Приращение Δs можно представить в следующем виде:

$$\Delta s=g(2t\Delta t+\Delta t^2)/2.$$

Разделив Δs на Δt, получаем среднюю скорость падения точки на участке MM_1:

$$v_{cp}=\Delta s/\Delta t=gt+g\Delta t/2.$$

Скорость, меняясь вместе с изменением Δt, тем лучше характеризует состояние падающей точки в момент времени t, чем меньше промежуток Δt, протёкший с момента начала падения.
Мгновенной скоростью точки в момент времени t называют предел, к которому стремиться средняя скорость v_{cp} за промежуток Δt, когда Δt стремится к нулю, т.е.

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \left(\Delta s / \Delta t \right) = \lim_{\Delta t \to 0} \left(g\,t + g\,\Delta t / 2 \right) = g\,t\,.$$

Аналогично вычисляется скорость и в более общем случае.

2. Задача о проведении касательной к кривой

Рассмотрим квадратичную параболу $y=ax^2$. Найдём угловой коэффициент касательной k, равный тангенсу угла наклона данной линии, т.е. $k=tg(\varphi)$. Придав абсциссе x приращение Δx. Тогда её ордината y определяется соотношением:

$$y+\Delta y = a(x+\Delta x)^2.$$

Из этого соотношения можно получить:

$$\Delta y = a(2x\Delta x+\Delta x^2).$$

Угловой коэффициент касательной из геометрических соображений можно определить с помощью следующего соотношения:

$$tg(\varphi)=\Delta y/\Delta x=2ax+a\Delta x.$$

Переходя в данном соотношении пределу при $x\to 0$, получаем

$$tg(\varphi) = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\Delta y / \Delta x \right) = \lim_{\Delta x \to 0} \left(2ax + a\,\Delta x \right) = 2a\,x\,.$$

При определении тангенса угла наклона касательной к другой функции используется аналогичная схема.

Производная функции

Сопоставляя операции, которые мы осуществляли при рассмотрении данных задач, в обеих задачах выполнялись однотипные операции: деление приращения функции Δy на приращение аргумента Δx, далее устремляя Δx к нулю. Такая операция называется вычислением производной (дифференцированием).
Определение 35
Более строгим определением производной является следующее:

$$\frac{d\,y(x)}{d\,x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta\,y(x)}{\Delta\,x} \right) = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{y(x+\Delta x) - y(x+\Delta x)}{\Delta\,x} \right).$$

Производные второго, третьего и т.д. порядков определяются аналогично первой производной. Однако, дифференцируются при этом не исходные функции, а производные предыдущих порядков.

Геометрический смысл производной

Геометрический смысл производной - тангенс угла наклона касательной к дифференцируемой функции.

Производная элементарной функции

Используя определение производной для элементарных функций можно получить:

Функция	Производная
x^a	$a\,x^{a-1}$
a^x	$a^x ln(a)$
$log_a(x)$	$1/[x\cdot ln(a)]$
$sin(x)$	$cos(x)$
$cos(x)$	$-sin(x)$
$tg(x)$	$1/cos^2(x)$
$ctg(x)$	$-1/sin^2(x)$
$sh(x)$	$Ch(x)$
$ch(x)$	$Sh(x)$
$th(x)$	$1/ch^2(x)$
$cth(x)$	$-1/sh^2(x)$
$arcsin(x)$	$1\Big/\sqrt{1-x^2}$
$arccos(x)$	$-1\Big/\sqrt{1-x^2}$
$arctg(x)$	$1/(1+x^2)$
$arcctg(x)$	$-1/(1+x^2)$
$arsh(x)$	$1\Big/\sqrt{x^2+1}$
$arch(x)$	$1\Big/\sqrt{x^2-1}$
$arth(x)$	$1/(1-x^2)$
$arcth(x)$	$-1/(1-x^2)$

Производные суммы, разности, произведения и частного

Используя определение производной для элементарных функций можно получить:

$$\frac{d\left[f_1(x)\pm f_2(x)\right]}{d\,x}=\frac{d\,f_1(x)}{d\,x}\pm\frac{d\,f_2(x)}{d\,x};$$

$$\frac{d\left[f_1(x)\,f_2(x)\right]}{d\,x}=f_2(x)\frac{d\,f_1(x)}{d\,x}+f_1(x)\frac{d\,f_2(x)}{d\,x};$$

$$\frac{d}{d\,x}\left[\frac{f_1(x)}{f_2(x)}\right]=\frac{1}{f_2^2(x)}\left[f_2(x)\frac{d\,f_1(x)}{d\,x}-f_1(x)\frac{d\,f_2(x)}{d\,x}\right].$$

Для доказательства данных соотношений воспользуемся формальным определением производной, т.е. сначала рассматриваем отношения соответствующих приращений функций и аргументов, затем вычисляем пределы данных приращений при $x\to 0$. Тогда:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left[f_1(x+\Delta x)-f_1(x)\right]\pm\left[f_2(x+\Delta x)-f_2(x)\right]}{\Delta x}=\lim_{x\to 0}\frac{f_1(x+\Delta x)-f_1(x)}{\Delta x}\pm$$

$$\pm\lim_{x\to 0}\frac{f_2(x+\Delta x)-f_2(x)}{\Delta x}=\frac{d\,f_1(x)}{d\,x}\pm\frac{d\,f_2(x)}{d\,x};$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f_1(x+\Delta x)f_2(x+\Delta x)-f_1(x)f_2(x)}{\Delta x}=\lim_{x\to 0}\frac{f_1(x+\Delta x)f_2(x+\Delta x)-f_1(x+\Delta x)f_2(x)}{\Delta x}+$$

$$+\lim_{x\to 0}\frac{f_1(x+\Delta x)f_2(x)-f_1(x)f_2(x)}{\Delta x}=\lim_{x\to 0}\frac{f_1(x+\Delta x)[f_2(x+\Delta x)-f_2(x)]}{\Delta x}+$$

$$+\lim_{x\to 0}\frac{f_2(x)[f_1(x+\Delta x)-f_1(x)]}{\Delta x}=f_1(x)\frac{d\,f_2(x)}{d\,x}+f_2(x)\frac{d\,f_1(x)}{d\,x};$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{f_1(x+\Delta x)}{f_2(x+\Delta x)}-\frac{f_1(x)}{f_2(x)}\right]=\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{f_1(x+\Delta x)\,f_2(x)-f_2(x+\Delta x)\,f_1(x)}{f_2(x+\Delta x)\,f_2(x)}\right]=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\left\{\frac{[f_1(x+\Delta x)f_2(x)-f_1(x)f_2(x)]-[f_2(x+\Delta x)\,f_1(x)-f_1(x)f_2(x)]}{f_2(x+\Delta x)\,f_1(x)}\right\}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\left\{\frac{f_2(x)[f_1(x+\Delta x)-f_1(x)]-f_1(x)[f_2(x+\Delta x)-f_2(x)]}{f_2(x+\Delta x)\,f_1(x)}\right\}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\left\{\frac{f_2(x)[f_1(x+\Delta x)-f_1(x)]}{f_2(x+\Delta x)\,f_1(x)}\right\}-\lim_{\Delta x\to 0}\left\{\frac{f_1(x)[f_2(x+\Delta x)-f_2(x)]}{f_2(x+\Delta x)\,f_1(x)}\right\}=$$

$$=f_2(x)\frac{d\,f_1(x)/d\,x}{f_2^2(x)}-f_1(x)\frac{d\,f_2(x)/d\,x}{f_2^2(x)}=\frac{f_2(x)f_1'(x)-f_1(x)f_2'(x)}{f_2^2(x)}.$$

Производная сложной функции

Установим правило, позволяющее найти производную сложной функции $y=f[\varphi(t)]$ в точке t при условии, что известны производные составляющих её функций $x=\varphi(t)$ и $y=f(x)$ в точках t и $x=\varphi(t)$, соответственно. При этом считается, что функция $x=\varphi(t)$ дифференцируема в точке t, а функция $y=f(x)$ дифференцируема в точке $x=\varphi(t)$. Для вывода искомого соотношения придадим аргументу функции $x=\varphi(t)$ в данной точке t произвольное отличное от нуля приращение Δt. Этому приращению соответствует приращение $\Delta x=\varphi(t+\Delta t)-\varphi(t)$ функции $x=\varphi(t)$, причём данное приращение Δx может обращаться в нуль. С другой стороны приращению Δx соответствует приращение $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$ функции $y=f(x)$ в соответствующей точке $x=\varphi(t)$. Может быть показано, что по условию дифференцируемости функции $y=f(x)$ в точке $x=\varphi(t)$ приращение Δy в данной точке может быть представлено в следующем виде:

$$\Delta y=f'(x)\Delta x+\alpha(\Delta x)\Delta x,$$

где $\alpha(\Delta x)$ имеет равный нулю предел при $\Delta x \to 0$. Поделив последнее соотношение на $\Delta t \neq 0$, получаем:

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = f'(x)\frac{\Delta x}{\Delta t} + \alpha(\Delta x)\frac{\Delta x}{\Delta t}.$$

Из дифференцируемости функции $x=\varphi(t)$ в точке t следует, что отношение $\Delta x/\Delta t$ имеет предел при $\Delta t \to 0$, равный $\varphi'(t)$. Функция $\alpha(\Delta x)$ имеет нулевой предел при $\Delta t \to 0$, что вытекает из предела $\alpha(\Delta x) \to 0$ при $\Delta x \to 0$. Таким образом, получаем:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d\,f(x)}{dx}\frac{dx}{dt}.$$

Производная обратной функции

Пусть функция $y=f(x)$ монотонна и непрерывна в некоторой окрестности точки x. Будем также считать, что данная функция дифференцируема в указанной точке x и её производная в этой точке $f'(x)$ отлична от нуля. Тогда в некоторой окрестности соответствующей точки для функции $y=f(x)$ определена обратная функция $x=f^{-1}(y)$, причём указанная обратная функция дифференцируема в соответствующей точке $y=f(x)$ и для её производной справедлива формула:

$$\frac{d\,f^{-1}(y)}{dy} = \left[\frac{d\,f(x)}{dx}\right]^{-1}.$$

Доказательство

Т.к. функция $y=f(x)$ монотонна и непрерывна в некоторой окрестности точки x, то и обратная ей функция также будет монотонной и непрерывной в окрестности соответствующей точки. Придадим аргументу этой обратной функции малое, но отличное от нуля приращение Δy. Этому приращению соответствует приращение $\Delta x = f^{-1}(y+\Delta y) - f^{-1}(y)$ обратной функции в соответствующей точке $y=f(x)$. Причём в силу строгой монотонности обратной функции приращение Δx отлично от нуля, что позволяет записать:

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\Delta y/\Delta x}.$$

Последнее соотношение может быть представлено в следующем виде:

$$\frac{1}{\Delta y/\Delta x} = \frac{1}{\left[y(x+\Delta x) - y(x)\right]/\Delta x}.$$

Из последнего соотношения в силу определения производной $y=f'(x)$ и предположения $f'(x) \neq 0$ следует, что предел при $\Delta x \to 0$ в правой части существует и равен $1/f'(x)$.

Производная функции, заданной неявно

Полученные нами правила дифференцирования сложных функций позволяют более просто, чем ранее, находить производные функций, заданных неявно. Пусть уравнение

$$F(x,y) = 0$$

определяет $y = \varphi(x)$ как некоторую дифференцируемую функцию. Тогда имеем тождество

$$F(x,\varphi(x)) = 0.$$

Дифференцируем его по переменной x, рассматривая левую часть как сложную функцию одной переменной, где $\begin{cases} x = x \\ y = \varphi(x) \end{cases}$.

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{\partial F}{\partial x}\bigg/\frac{\partial F}{\partial y}.$$

Производная функции, заданной параметрически

<u>Определение 36</u>

Переменная y как функция аргумента x задана параметрически, если обе переменные x и y заданы как функции третьей переменной t, т.е. $x=\varphi(t)$ и $y=\psi(t)$. При этом переменная t называется параметром.

Считается, что

1) функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ имеют необходимое количество производных в рассматриваемой области изменения параметра t;
2) функция $x=\varphi(t)$ в окрестности точки $t=t_0$ имеет обратную функцию $t=\varphi^{-1}(x)$, что позволяет рассматривать y как функцию x.

Рассмотрим вопрос о вычислении производных функции $y=y(x)$ по аргументу x. Первая производная функции $y=y(x)$ по аргументу x может быть записана в следующей форме:

$$y'(x) = \frac{d\,y(x)}{d\,x} = \frac{\psi'(t)d\,t}{\varphi'(t)d\,t} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}.$$

Для вычисления второй производной второго порядка воспользуемся соотношением:

$$y''(x) = \frac{d\left[y'(x)\right]}{d\,x} = \frac{\tilde{\psi}'(t)d\,t}{\tilde{\varphi}'(t)d\,t} = \frac{\tilde{\psi}'(t)}{\tilde{\varphi}'(t)}.$$

Подстановка в данное соотношение соотношения для предыдущей производной позволяет получить:

$$y''(x) = \left\{\left[\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right]' d\,t\right\}\bigg/\varphi'(t)d\,t = \frac{\psi''(t)\varphi'(t) - \psi'(t)\varphi''(t)}{\left[\varphi'(t)\right]^2}\bigg/\varphi'(t).$$

Аналогично вычисляются производные следующих порядков.

7. *Дифференциал*

Для определения понятия дифференциала вспомним определение дифференцируемости функции $y=f(x)$.

Определение 37

Функция $y=f(x)$ называется дифференцируемой в точке x, если её приращение Δy этой функции в точке x, отвечающее приращению Δx, может быть представлено в следующем виде:

$$\Delta y=A\Delta x+\alpha(\Delta x)\Delta x,$$

где $A=f'(x)$ - величина, не зависящая от Δx (т.е. первое слагаемое линейно относительно Δx), а $\alpha(\Delta x)$ - функция Δx, бесконечно малая в точке $\Delta x=0$.

Определение 38

Первое слагаемое представляет собой главную часть приращения Δy дифференцируемой функции $y=f(x)$ и называется дифференциалом данной функции. Дифференциал функции $y= f(x)$ обозначается следующим образом:

$$\Delta y=f'(x)\Delta x.$$

При этом удобно ввести понятие дифференциала независимой переменной dx. Тогда:

$$dy=f'(x)dx.$$

Свойства дифференциала аналогичны свойствам производной.

Геометрический смысл дифференциала

Геометрический смысл дифференциала функции одной переменной может быть сформулирован следующим образом. Дифференциал данной функции равен приращению ординаты касательной линии.

Отметим также, что дифференциал функции двух переменных применяется, как и дифференциал функции одной переменной, для приближенных вычислений по формуле

$$\Delta f \approx (d f)_0 = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 \Delta x + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 \Delta y .$$

Применение дифференциала в приближённых вычислениях

Будем считать, что аргумент x функции $y=f(x)$ является независимой переменной. Может быть показано, что в общем случае дифференциал dy функции $y=f(x)$ в общем случае не совпадает с её приращением Δy. Не смотря на это с точностью до бесконечно малой функции более высокого порядка, чем Δx, справедливо соотношение: $\Delta y\approx dy$. Отношение $(\Delta y-dy)/\Delta x$ называется относительной погрешностью предыдущего равенства. Т.к. $\Delta y-dy=o(\Delta x)$, то относительная погрешность предыдущего равенства становится сколь угодно малой при уменьшении $|\Delta x|$. Последнее соотношение позволяет приближённо заменять приращение Δy дифференцируемой функции $y=f(x)$ дифференциалом dy этой функции. Целесообразность такой замены оправдывается тем, что дифференциал dy является линейной функцией Δx, а приращение Δy представляет собой более сложную функцию аргумента Δx. Учитывая, что $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$ и $d y=f'(x)\Delta x$, можно переписать предыдущее приближённое равенство в виде:

$$f(x+\Delta x)-f(x)\approx f'(x)\Delta x.$$

Эквивалентная форма записи данного соотношения может быть представлена в следующем виде:

$$f(x+\Delta x)\approx f(x)+f'(x)\Delta x.$$

Данное соотношение справедливо для любой дифференцируемой в точке x функции $f(x)$ с точностью до величины $o(\Delta x)$ более высокого порядка малости, чем Δx.

Пример 28

Рассмотрим функцию

$$f(x)=x^2.$$

Значение функции в точки $f(x+0.01)$ можно определить с помощью следующего соотношения:

$$f(x+0.01)\approx x^2+0.02x.$$

Точное значение функции:

$$f(x+0.01)=x^2+0.02x+0.0001.$$

Дифференциалы высших порядков

Второй дифференциал функции $y=f(x)$ определяется как первый дифференциал от первого дифференциала данной функции, что приводит к следующему соотношению:

$$d^2y=f''(dx)^2+f'(x)d^2x.$$

Третий дифференциал функции $y=f(x)$ определяется как первый дифференциал от второго дифференциала данной функции, что приводит к следующему соотношению:

$$d^3y=f'''(dx)^3+2f''dx\,d^2x+f''(x)dxd^2x+f'(x)d^3x=f'''(dx)^2+3f''dx\,d^2x+f'(x)d^3x.$$

Дифференциалы более высоких порядков определяются аналогично.

8. *Исследования кривых и построение графиков. Экстремумы, перегибы, асимптоты*

Признаки монотонности функций

Изучение вопроса об участках монотонности дифференцируемой функции $f(x)$ сводится к исследованию знака первой производной данной функции. Можно показать, что условия монотонности функции можно сформулировать следующим образом:

1. для того, чтобы дифференцируемая на интервале (a,b) функция $f(x)$ не убывала (не возрастала) на данном интервале, необходимо и достаточно, чтобы производная $f'(x)$ данной функции была неотрицательна (неположительна) всюду на данном интервале;
2. для того, что бы дифференцируемая на интервале (a,b) функция $f(x)$ возрастала (убывала) на интервале (a,b), достаточно, чтобы производная $f'(x)$ дан-

ной функции была положительной (отрицательной) всюду на данном интервале.

Пример 29

Найдём участки монотонности функции $f(x)=x^3-3x^2-4$. Производная $f'(x)=3(x^2-2x)$ данной функции положительна при $-\infty< x<0$, отрицательна при $-0< x<2$ и положительна при $2< x< +\infty$. Из данных результатов следует, что рассматриваемая функция возрастает на полупрямой $x\in$ $(-\infty,0)$, убывает при $x\in(0,2)$ и возрастает на полупрямой $x\in(2,+\infty)$.

Отыскание стационарных точек

В начале введём определения локальных максимума и минимума.

Определение 39

Пусть функция $y=f(x)$ определяется всюду в некоторой окрестности точки x_0. Тогда эта точка является координатой локального максимума (или локального минимума), если существует такая окрестность точки x_0, что для всех точек данной окрестности значение $f(x_0)$ является наибольшим (или наименьшим) среди всех значений данной функции $f(x)$. Локальные максимум и минимум объединяются единым термином "локальный экстремум".

Необходимое условие существования локального экстремума

Может быть показано, что необходимое условие локального экстремума функции $y=f(x)$ может быть сформулировано в следующем виде: если функция $y=f(x)$ дифференцируема в точке x_0 и имеет в данной точке локальный экстремум, то $f'(x_0)=0$. Однако, данное условие является необходимым, но не является достаточным условием локального экстремума.

Пример 30

Рассмотрим функцию $f(x)=x^3$. Её производная $f'(x)=3x^2$ обращается в нуль в точке $x=0$. Однако данная точка является координатой перегиба, а не экстремума.

Определение 40

Точки, в которых производная $f'(x)$ функции $f(x)$, называются стационарными точками данной функции.

Каждая стационарная точка - координата возможного экстремума. Достаточные условия экстремума могут быть сформулированы следующим образом.

Первое достаточное условие существования локального экстремума

Пусть функции $f(x)$ дифференцируема всюду в окрестности точки x_0. Пусть данная точка x_0 является стационарной точкой функции $f(x)$. Тогда если в пределах данной окрестности производная $f'(x)$ положительна (отрицательна) слева от точки x_0 и отрицательна (положительна) справа от данной точки, то функция $f(x)$ имеет в точке x_0 локальный максимум (минимум). Если с обеих сторон от точки x_0 производная $f'(x)$ имеет один и тот же знак, то экстремума в точке нет.

Пример 31

Найти точки экстремума функцию $f(x)=x^3-3x^2-4$. Её производная $f'(x)=3x(x-2)$ обращается в нуль в точках $x=0$ и $x=2$. При переходе через точку $x=0$ производная меняет знак с плюса на минус, при переходе через точку $x=2$ производная меняет знак с минуса на плюс. Таким образом, точка x=0 - координата локального максимума, точка x=2 – координата локального минимума.

Пример 32

Найти точки экстремума функцию $f(x)=(x-2)^5$. Её производная $f'(x)=5(x-2)^4$ обращается в нуль в точке x=2. При переходе через данную точку производная сохраняет свой знак, оставаясь положительной. Таким образом, стационарная точка x=2 не является координатой экстремума.

Иногда исследование знака первой производной вызывает трудности. Тогда проводится анализ второй производной.

Второе достаточное условие существования локального экстремума

Пусть функция $f(x)$ имеет в стационарной точке x_0 конечную вторую производную. Тогда рассматриваемая функция имеет локальный максимум в рассматриваемой стационарной точке, если $f''(x_0)<0$. Если $f''(x_0)>0$, тогда функция $f(x)$ имеет локальный минимум в данной точке.

В случае, когда $f''(x_0)\equiv 0$, тогда представляет интерес следующее достаточное условие экстремума.

Третье достаточное условие существования локального экстремума

Пусть $n\geq 1$- некоторое нечётное число и пусть функция $y=f(x)$ имеет производную порядка n в некоторой окрестности точки x_0 и производную порядка n+1 в самой точке x_0. Тогда, если выполнены соотношения

$$f'(x_0)=f''(x_0)=\ldots=f^{(n)}(x_0)=0,\ f^{(n+1)}(x_0)\neq 0,$$

то функция $y=f(x)$ имеет в точке x_0 локальный максимум при $f^{(n+1)}(x_0)<0$ и локальный минимум при $f^{(n+1)}(x_0)>0$.

Экстремум функции, недифференцируемой в данной точке

Первое достаточное условие экстремума может быть обобщено на случай, когда функция $y=f(x)$ дифференцируема везде, кроме некоторой окрестности точки x_0. Будем считать, что x_0 – стационарная точка функции $f(x)$, в которой функция $f(x)$ непрерывна. Тогда, если в данной окрестности производная $f'(x)$ положительна (отрицательна) слева от точки x_0 и отрицательна (положительна) справа от точки x_0, то функция $f(x)$ имеет в данной точке локальный максимум (минимум) в данной точке. Если производная $f'(x)$ имеет один и тот же знак с обеих сторон от точки x_0, то экстремума в данной точке нет.

Пример 33

Найдём точки экстремума функции $f(x)=|x|$. Эта функция непрерывна и дифференцируема в любой точке, кроме точки x=0. Производная $f'(x)$ данной функции положительна ($f'(x)$=1) на положительной полуоси и отрицательна ($f'(x)$=-1) на отрицательной полуоси. Таким образом, функция $f(x)=|x|$ имеет экстремум в точке $|x|$=0, являющийся минимумом.

Пример 34

Найдём точки экстремума функции $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$. Данная функция непрерывна и дифференцируема везде, кроме точки x=0 (разрыв второго рода). Производная

$f'(x)=2\big/3\sqrt[3]{x}$ ($x\neq0$) данной функции отрицательна слева от точки x=0 и положительна справа от данной точки. Таким образом, функция $f(x)$ имеет минимум в точке x=0.

Пример 35

Найдём точки экстремума функции

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{1+\exp(1/x)}, & x\neq0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

Данная функция непрерывна и дифференцируема везде, кроме точки x=0. Производная

$$f'(x)=\frac{1+\exp(1/x)+\exp(1/x)/x}{[1+\exp(1/x)]^2}\,.$$

положительна и слева, и справа от точки x=0. Таким образом, данная функция экстремума не имеет.

Общая схема отыскания экстремума

Рассмотрим общую схему отыскания точек локального экстремума. Предположим, что функция $f(x)$ непрерывна на интервале (a,b) и её производная $f'(x)$ существует и непрерывна на данном интервале везде, кроме конечного числа точек. Предположим также, что производная $f'(x)$ обращается в нуль на интервале (a,b) не более, чем в конечном числе точек. Т.е. предполагается, что на интервале (a,b) существует конечное число точек, в которых производная $f'(x)$ не существует или обращается в нуль. Обозначим эти точки символами x_1, x_2, …, x_n ($a<x_1<x_2<\ldots<x_n<b$). В силу сделанных предположений производная $f'(x)$ сохраняет постоянный знак на каждом из интервалов (a,x_1), (x_1,x_2), …, (x_n,b). Таким образом, вопрос о наличии экстремума в каждой из точек x_1, x_2, …, x_n может быть решён (положительно или отрицательно) при помощи предыдущего раздела (“Экстремум функции, недифференцируемой в данной точке”).

Выпуклость графика функции

Предположим, что функция $f(x)$ дифференцируема в любой точке интервала (a,b). Тогда существует касательная к графику функции $y=f(x)$, проходящая через любую точку $M(x,y)$ этого графика ($a<x<b$).

Определение 41

График функции $y=f(x)$ имеет на интервале (a,b) выпуклость, направленную вниз (вверх), если график этой функции в пределах указанного интервала лежит не ниже (не выше) любой своей касательной.

Следует заметить, что

1) термин “график лежит не ниже (не выше) любой своей касательной” имеет смысл, если касательная не параллельна оси Oy;
2) часто вместо терминов “выпуклость, направленная вверх” и “выпуклость, направленная вниз” используются термины “выпуклая” и “вогнутая” функ-

ции.

Определение направления выпуклости функции

Если функция $y=f(x)$ имеет на интервале (a,b) конечную вторую производную и если эта производная неотрицательна (неположительна) всюду на этом интервале, то можно показать, что график данной функции $y=f(x)$ имеет на интервале (a,b) выпуклость, направленную вниз (вверх).

Можно также доказать следующее утверждение: пусть вторая производная функции $y=f(x)$ непрерывна и положительна (отрицательна) в точке x_0. Тогда существует такая окрестность точки x_0, в пределах которой график функции $y=f(x)$ имеет выпуклость, направленную, вниз (вверх).

Пример 36

Исследовать направление выпуклости графика функции $f(x)=x^3-3x^2-4$. Из вида второй производной $f''(x)=6(x-1)$ вытекает, что эта производная отрицательна при $x<1$ и положительна $x>1$. Таким образом, функция $f(x)=x^3-3x^2-4$ является выпуклой на интервале $x\in(-\infty,1)$ и вогнутой на интервале $(1,\infty)$.

Следует заметить, что функция $f(x)=a\,x$ имеет нулевую вторую производную при любом значении аргумента. По этой причине можно считать, что линейной функции соответствует любой тип выпуклости.

Точки перегиба

Пусть a, b и c некоторые три числа, связанные неравенствами $a<c<b$. Предположим, что функция $y=f(x)$ дифференцируема на интервале (a,b), т.е. существует касательная к графику этой функции во всех точках, абсциссы которых принадлежат интервалу (a,b). Предположим также, что график функции $y=f(x)$ имеет определённое направление выпуклости на каждом из интервалов (a,c) и (c,b).

Определение 42

Точка $M(x_0, f(x_0))$ графика функции $y=f(x)$ называется точкой перегиба, если существует такая окрестность точки x_0 оси абсцисс, в пределах которой график функции $y=f(x)$ слева и справа от x_0 имеет разные направления выпуклости.

Необходимое условие существования перегиба графика функции

Если функция $y=f(x)$ имеет в точке x_0 вторую производную и график этой функции имеет перегиб в точке $M(x_0,f(x_0))$, то $f''(x_0)=0$.

Однако данное условие является только необходимым, но не достаточным условием перегиба. Недостаточность данного условия можно проиллюстрировать следующим примером.

Пример 37

Рассмотрим функцию $f(x)=x^4$. Вторая производная $f''(x)=12x^2$ данной функции обращается в нуль в точке $x=0$. Но в точке $M(0,0)$ рассматриваемая функция перегиба не имеет.

Первое достаточное условие существования перегиба графика

дважды дифференцируемой функции

Пусть функция $y=f(x)$ имеет вторую производную в окрестности точки x_0 и $f''(x_0)=0$. Тогда, если в пределах указанной окрестности вторая производная

$f''(x)$ имеет разные знаки слева и справа от x_0, то график этой функции имеет перегиб в точке $M(x_0,f(x_0))$.
Следует заметить, что можно отказаться от требования двухкратной дифференцируемости функции $y=f(x)$ в самой точке x_0, сохраняя это требование лишь для точек, лежащих в окрестности слева и справа от точки x_0. При этом следует дополнительно предположить существование конечной производной $f'(x_0)$.
На случай, когда нежелательно исследование знака второй производной в окрестности точки x_0, сформулируем второе достаточное условие перегиба, предполагающее существование у функции $y=f(x)$ в точке x_0 конечной третьей производной.

Второе достаточное условие существования перегиба графика функции

Если функция $y=f(x)$ имеет в точке x_0 конечную третью производную и удовлетворяет в этой точке условиям $f''(x_0)=0$, $f'''(x_0)\neq 0$, то график этой функции имеет перегиб в точке $M(x_0,f(x_0))$.
В случае, когда обращается в нуль, как вторая, так и третья производные рассматриваемой функции возможно применение следующего достаточного условия перегиба.

Третье достаточное условие существования перегиба графика функции

Пусть $n\geq 2$ - некоторое чётное число, и пусть функция $y=f(x)$ имеет производную порядка n в некоторой окрестности точки x_0 и производную порядка $n+1$ в самой точке x_0. Тогда, если выполнены соотношения

$$f''(x_0)=f'''(x_0)=\ldots=f^{(n)}(x_0)=0,\ f^{(n+1)}(x_0)\neq 0,$$

то график функции $y=f(x)$ имеет перегиб в точке $M(x_0,f(x_0))$.

Асимптоты графика функции

<u>Определение 43</u>

Прямая $x=a$ называется вертикальной асимптотой графика $y=f(x)$, если хотя бы один из пределов

$$\lim_{x\to a+0} f(x) \text{ или } \lim_{x\to a-0} f(x)$$

равен $+\infty$ или $-\infty$.

<u>Пример 38</u>

График функции $y=1/x$ имеет вертикальную асимптоту $x=0$, т.к. $\lim\limits_{x\to a+0} x^{-1}=+\infty$ и $\lim\limits_{x\to a-0} x^{-1}=-\infty$.

<u>Определение 44</u>

Прямая $Y=kx+b$ называется наклонной асимптотой графика $y=f(x)$, если $f(x)$ представима в виде:

$$f(x)=kx+b+\alpha(x),$$

где $\lim\limits_{x\to+\infty}\alpha(x)=0$. Следует заметить, что для того, чтобы график функции $y=f(x)$ имел при $x\to+\infty$ наклонную асимптоту, определяемую предыдущим соотношением, необходимо и достаточно, чтобы существовали два предела:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)/x=k \text{ и } \lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-k\,x\right]=b.$$

Пример 39

График функции $y=x(2x+1)/(x+1)$ имеет наклонную асимптоту $Y=2x-1$ и при $x\to+\infty$, и $x\to-\infty$ и, кроме того, имеет вертикальную асимптоту $x=-1$. Обе асимптоты подтверждаются следующими соотношениями:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x^2+x}{x(x+1)}=2 \text{ и } \lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-2x\right]=\lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{1}{x+1}-1\right]=-1.$$

Определение 45

Многочлен n-го порядка $Y=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$, называется асимптотой графика функции $y=f(x)$ при $x\to+\infty$, если функция $f(x)$ представима в виде

$$f(x)=a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0+\alpha(x),\ \lim_{x\to+\infty}\alpha(x)=0.$$

Можно показать, что для того, чтобы график функции $y=f(x)$ имел при $x\to+\infty$ асимптоту в виде последнего полинома, необходимо и достаточно, чтобы существовали следующие пределы:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)/x^n=a_n,\ \lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-a_nx^n\right]/x^{n-1}=a_{n-1},$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-a_nx^n-a_{n-1}x^{n-1}-\ldots-a_2x^2\right]/x=a_1,$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-a_nx^n-a_{n-1}x^{n-1}-\ldots-a_2x^2-a_1x\right]=a_0.$$

Построение графика функции

В данном разделе рассмотрим схему, по которой целесообразно проводить исследование графика функции $y=f(x)$. Можно выделить следующие основные этапы построения графика функции:

1. Уточнить область задания функции.
2. Проверить существование асимптот (вертикальных и наклонных).
3. Найти область возрастания и убывания функции, а также точки экстремума.
4. Найти области сохранения направления выпуклости и точки перегиба.
5. Найти точки пересечения графика анализируемой функции с осью Оx.

Пример 40

В качестве примера рассмотрим график функции

$$y(x)=\frac{x^3-5x^2+19x-15}{x^2}.$$

Для анализа данной функции воспользуемся изложенной выше схемой.

1. Поскольку рассматриваемая функция представляет собой рациональную

дробь, то она определена и непрерывна всюду на бесконечной прямой, кроме точки x=0, в которой обращается в нуль знаменатель.

2. Далее проведём анализ асимптот. Значение предела

$$\lim_{x\to 0\pm 0}\frac{x^3-5x^2+19x-15}{x^2}=-\infty.$$

показывает, что график данной функции имеет вертикальную асимптоту x=0. Из существования пределов

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3-5x^2+19x-15}{x^2}=\lim_{x\to\pm\infty}\left(1-\frac{5}{x}+\frac{19}{x^2}-\frac{15}{x^3}\right)=1,$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-x\right]=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3-5x^2+19x-15-x^3}{x^2}=\lim_{x\to\pm\infty}\left(-5+\frac{19}{x}-\frac{15}{x^2}\right)=-5$$

следует, что при $x\to\pm\infty$ график рассматриваемой функции имеет наклонную асимптоту $Y=x-5$.

3. Для нахождения областей возрастания и убывания функции определим первую производную рассматриваемой функции:

$$y'(x)=\frac{x^3-19x+30}{x^3}=\frac{(x+5)(x-2)(x-3)}{x^3}.$$

С учётом того, что и сама функция, и первая производная не существуют в точке x=0, получаем следующие области сохранения знака y:

Область значений x	$-\infty<x<-5$	$-5<x<0$	$0<x<2$	$2<x<3$	$3<x<+\infty$
Знак y'	+	-	+	-	+
Поведение функции	Возрастает	Убывает	Возрастает	Убывает	Возрастает

Из данной таблицы следует, что функция имеет следующие точки экстремума:

Значение координаты	Значение функции	Тип экстремума
x=-5	y(-5)=-14,4	максимум
x=2	y(2)=2,75	максимум
x=3	y(3)=2,666	минимум

4. Для нахождения областей сохранения направления выпуклости определим вторую производную анализируемой функции:

$$y''(x)=(38x-90)/x^4 .$$

Учитывая, что сама функция и её производные не существуют в точке x=0, получаем следующие области сохранения знака второй производной анализируемой функции:

Область значений x	$-\infty<x<0$	$0<x<45/19$	$45/19<x<+\infty$
Знак y''	-	-	+
Направление вы-	Вверх	Вверх	Вниз

пуклости графика

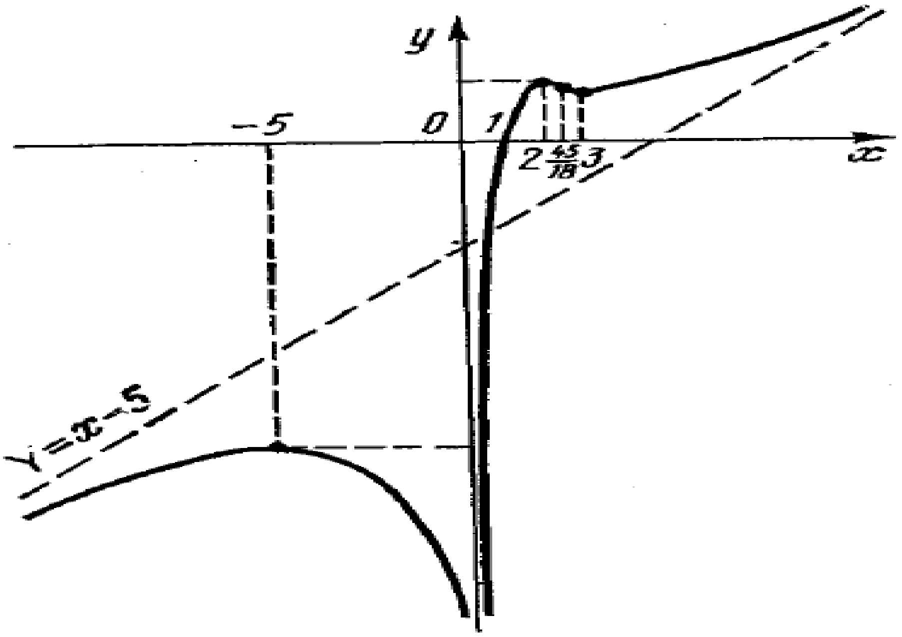
Из данной таблицы следует, что график функции имеет перегиб в точке M(45/19, y(45/19)). Значение функции легко вычисляется и равно y(45/19)= 6968/2565≈2,72.

5. Точки пересечения графика анализируемой функции с осью Ox соответствуют вещественным корням уравнения

$$y(x)=x^3\text{-}5x^2+19x–15=(x\text{-}1)(x^2\text{-}4x+15).$$

Второй множитель (квадратный трёхчлен) действительных корней не имеет. Поэтому существует единственное пересечение анализируемой функции с осью абсцисс (x=1).

По полученным данным строим график анализируемой функции, имеющий следующий вид:



Для нахождения глобальных экстремумов самый простой путь - сравнение значений функций в локальных экстремумах между собой и со значениями функций на границах рассматриваемого интервала.

<u>Пример 41</u>

Рассмотрим график функции

$$y(x)=\ln\left(\sqrt{x+2}\right).$$

Для анализа данной функции воспользуемся изложенной выше схемой.

1. Рассматриваемая функция определена и непрерывна всюду на бесконечной прямой при положительном значении аргумента, т.е. при x>2.
2. Далее проведём анализ асимптот. Значение предела

$$\lim_{x\to-2+0}\ln\left(\sqrt{x+2}\right)\to-\infty$$

показывает, что график данной функции имеет вертикальную асимптоту x=-2.

Из того, что следующие пределы не существуют

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(\sqrt{x+2}\right)}{x}\to\infty,\ \lim_{x\to\infty}\left[f(x)-x\right]=\lim_{x\to\infty}\left[\ln\left(\sqrt{x+2}\right)-x\right]\to\infty$$

следует, что при $x\to\infty$ график рассматриваемой функции не имеет наклонных асимптот.

3. Для нахождения областей возрастания и убывания функции определим первую производную рассматриваемой функции:

$$y'(x)=\frac{1}{2(x+2)}.$$

С учётом того, что и сама функция, и первая производная не существуют в точке x=0, получаем следующие области сохранения знака y:

Область значений x	Знак y'	Поведение функции
$-2<x<+\infty$	+	Возрастает

Из данной таблицы следует, что функция не имеет экстремумов.

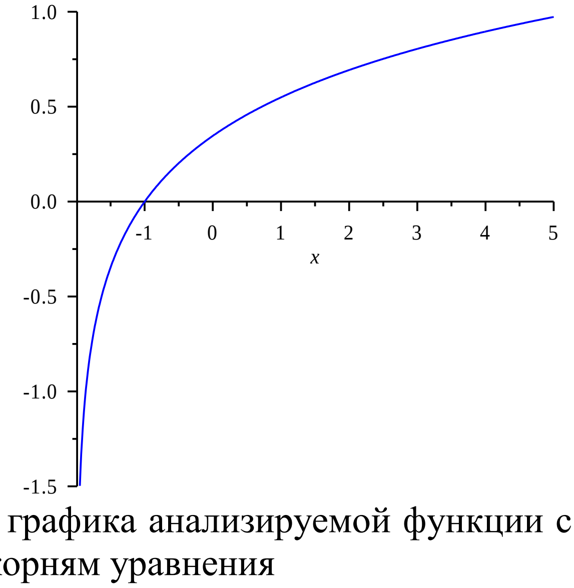
4. Для нахождения областей сохранения направления выпуклости определим вторую производную анализируемой функции:

$$y''(x)=-\frac{1}{2(x+2)^2}.$$

Учитывая, что сама функция и её производные не существуют в точке x=0, получаем следующие области сохранения знака второй производной анализируемой функции:

Область значений x	Знак y”	Направление выпуклости графика
$-2<x<+\infty$	+	Вверх

Из данной таблицы следует, что график функции не имеет перегибов.



5. Точки пересечения графика анализируемой функции с осью Оx соответствуют вещественным корням уравнения

$$\ln\left(\sqrt{x+2}\right)=1.$$

Существует единственное пересечение анализируемой функции с осью абсцисс (x=-1). Точек пересечения функции $y(x)=\ln\left(\sqrt{x+2}\right)$ с осью ординат не существвует. По полученным данным строим график анализируемой функции, имеющий вид, приведенный на последнем рисунке.

Пример 42

В качестве примера рассмотрим график функции

$$y(x)=x\cdot e^{-x}.$$

Для анализа данной функции воспользуемся изложенной выше схемой.

1. Рассматриваемая функция определена и непрерывна всюду на бесконечной прямой.
2. Далее проведём анализ асимптот. Значение предела

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x\cdot e^{-x}}{x}=\lim_{x\to+\infty}e^{-x}=0,\ \lim_{x\to-\infty}\frac{x\cdot e^{-x}}{x}=\lim_{x\to-\infty}e^{-x}\to-\infty.$$

показывает, что график данной функции не имеет вертикальных асимптот, но умеет горизонтальную $y=0$. Из существования пределов

$$\lim_{x\to+\infty}x\cdot e^{-x}=0,\ \lim_{x\to-\infty}x\cdot e^{-x}=\to-\infty$$

следует, что при $x\to\pm\infty$ график рассматриваемой функции не имеет наклонных асимптот.

3. Для нахождения областей возрастания и убывания функции определим первую производную рассматриваемой функции:

$$y'(x)=e^{-x}-x\cdot e^{-x}=(1-x)e^{-x}.$$

Получаем следующие области сохранения знака y:

Область значений x	$-\infty<x<1$	$1<x<+\infty$
Знак y’	+	-
Поведение функции	Возрастает	Убывает

Из данной таблицы следует, что функция имеет единственную точку экстремума:

Значение координаты	Значение функции	Тип экстремума
$x=1$	$y(1)=1/e\approx$	максимум

4. Для нахождения областей сохранения направления выпуклости определим вторую производную анализируемой функции:

$$y''(x)=-e^{-x}-(1-x)\cdot e^{-x}=(x-2)e^{-x}.$$

Получаем следующие области сохранения знака второй производной анализируемой функции:

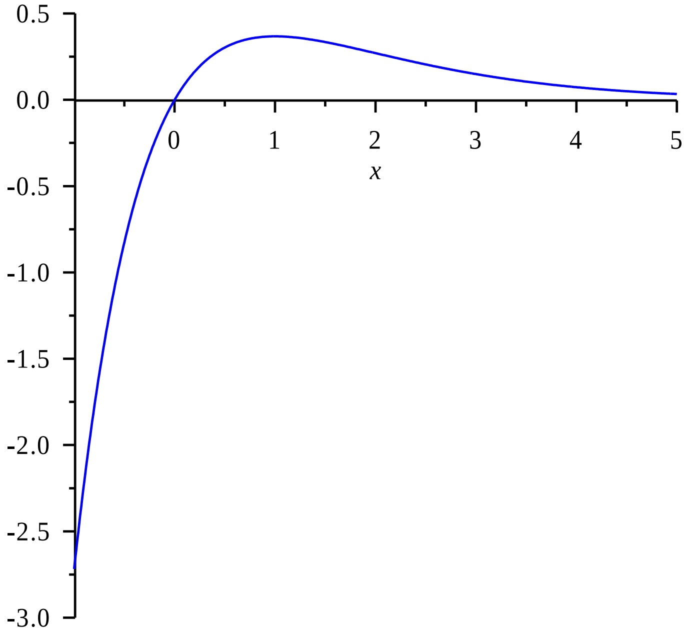
Область значений x	$-\infty<x<2$	$2<x<+\infty$
Знак y”	-	+
Направление выпуклости графика	Вверх	Вверх

Из данной таблицы следует, что график функции имеет перегиб в точке М(2,y(2)). Значение функции легко вычисляется и равно $y(2)=2\cdot e^{-2}\approx0,27$.

5. Точки пересечения графика анализируемой функции с осью Оx соответствуют вещественным корням уравнения

$$y(x)=x\cdot e^{-x}=0.$$

В данном случае существует единственное пересечение анализируемой функции с осью абсцисс (x=0). Одновременно эта же точка является и точкой пересечения графика рассматриваемой функции с осью ординат. По полученным данным строим график анализируемой функции, имеющий следующий вид:

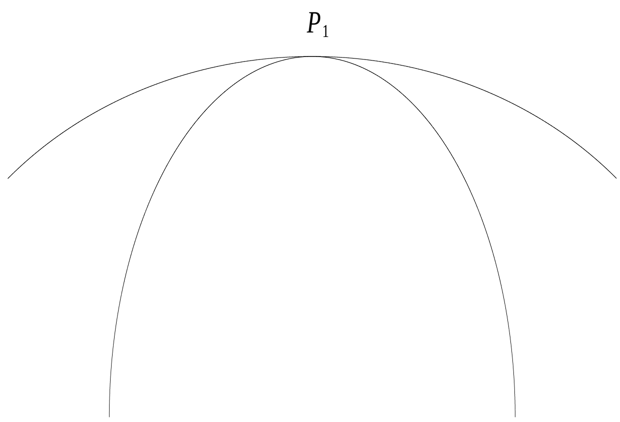


Кривизна и радиус кривизны кривой

Определение 46

Соприкасающейся окружностью (кругом кривизны) плоской кривой L в её точке P_1 называется предельное положение окружности, проходящей через P_1 и две соседние точки кривой P_2 и P_3, при стремлении P_2 и P_3 к P_1 (см. рис. 5.2). Центр этой окружности (центр кривизны кривой L, соответствующей точке P_1) лежит на нормали к L, проведённой в точке P_1. Координаты центра кривизны равны

$$x_k = x_1 - \frac{d\,y(x)}{d\,x}\left\{1+\left[\frac{d\,y(x)}{d\,x}\right]^2\right\}\bigg/\frac{d^2y(x)}{d\,x^2},\ y_k = y_1 + \left\{1+\left[\frac{d\,y(x)}{d\,x}\right]^2\right\}\bigg/\frac{d^2y(x)}{d\,x^2}$$



Все производные в данном соотношении вычисляются в точке P_1. Переход к параметрической форме задания кривой L позволяет получить

$$\begin{cases} x_k = x_1 - \dfrac{d\,y(t)}{d\,t}\left\{\left[\dfrac{d\,x(t)}{d\,t}\right]^2 + \left[\dfrac{d\,y(t)}{d\,t}\right]^2\right\} \Bigg/ \left[\dfrac{d\,x(t)}{d\,t}\dfrac{d^2y(t)}{d\,t^2} - \dfrac{d\,y(t)}{d\,t}\dfrac{d^2x(t)}{d\,t^2}\right] \\ y_k = y_1 + \dfrac{d\,x(t)}{d\,t}\left\{\left[\dfrac{d\,x(t)}{d\,t}\right]^2 + \left[\dfrac{d\,y(t)}{d\,t}\right]^2\right\} \Bigg/ \left[\dfrac{d\,x(t)}{d\,t}\dfrac{d^2y(t)}{d\,t^2} - \dfrac{d\,y(t)}{d\,t}\dfrac{d^2x(t)}{d\,t^2}\right] \end{cases}$$

<u>Определение 47</u>

Величина ℓ, обратная радиусу кривизны R кривой L, называется кривизной данной кривой в заданной точке. Кривизну можно определить как предел отношения угла поворота касательной к длине дуги кривой L при стремлении данной длины к нулю. Если функция задана параметрически $x(t)$ и $y(t)$, то кривизна определяется с помощью следующего соотношения

$$\ell = \left[\frac{d\,x(t)}{d\,t}\frac{d^2y(t)}{d\,t^2} - \frac{d\,y(t)}{d\,t}\frac{d^2x(t)}{d\,t^2}\right] \Bigg/ \left\{\left[\frac{d\,x(t)}{d\,t}\right]^2 + \left[\frac{d\,y(t)}{d\,t}\right]^2\right\}^{\frac{3}{2}}.$$

Если функция $y(x)$ задана в явном виде, то

$$\ell = \frac{d^2y(x)}{d\,x^2} \Bigg/ \left\{1 + \left[\frac{d\,y(x)}{d\,x}\right]^2\right\}^{\frac{3}{2}}.$$

Если функция $y(x)$ меняется достаточно медленно, то её первой производной можно пренебречь по сравнению с единицей. Тогда $\ell = y''(x)$. Часто именно вторую производную от функции $y(x)$ в заданной точке P_1 и называют кривизной кривой L в данной точке.

Кривизна кривой, заданной полярным уравнением $r = r(\varphi)$ определяется следующим соотношением

$$k = \left\{r^2(\varphi) + 2\left[\frac{d\,r(\varphi)}{d\,\varphi}\right]^2 - r(\varphi)\frac{d\,r^2(\varphi)}{d\,\varphi^2}\right\} \Bigg/ \left\{r^2(\varphi) + \left[\frac{d\,r(\varphi)}{d\,\varphi}\right]^2\right\}^{\frac{3}{2}}.$$

<u>Пример 44</u>

В качестве примера функции $y(x)$ рассмотрим кубическую параболу функция $y(x)=x^3/6q$. Вычисление необходимых производных приводит к следующему результату: $y'(x) = x^2/2q$, $y''(x) = x/q$. Радиус кривизны кубической параболы равен

$$R = \frac{x}{q} \Bigg/ \left(1 + \frac{x^4}{4q^2}\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{8xq^2}{\left(4q^2 + x^4\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

I) Найти значения пределов последовательностей

01.01 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2-9n+9}{n^2-5n+6}$; 01.02 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3-8n^2+12n}{n^3-3n^2+27}$; 01.03 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^3+5n^2+6}{2n^2+3n}$;

01.04 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2-5n-2}{2n^2-n-6}$; 01.05 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{1+n}-1}{n}$; 01.06 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n+9}-\sqrt{n-9}}{n^2+6n}$;

01.07 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-n^3}{\sqrt{n^6-1}}$; 01.08 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3-2n-n^2}{n^2+4n+1}$; 01.09 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2-5n+4}{n^3-n+1}$;

01.10 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^3}{5n^2+1}-\dfrac{3n^2}{15\ n+1}\right)$; 01.11 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3-8n^2+12n-18}{n^3-3n^2-9n+27}$; 01.12 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n+7}-\sqrt{n-7}}{5n}$;

01.13 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2+5n+4}{2n^2-n+1}$; 01.14 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2-7n+1}{3n^2+n+3}$; 01.15 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2-7}-3}{n^2-4n}$;

01.16 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2+n-4}{3+n-4n^2}$; 01.17 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3-1}{5n^2-4n-1}$; 01.18 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^3-2n+1}{3n^2+4n+2}$;

01.19 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5-2n-3n^2}{n^2+n+3}$; 01.20 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2-3n+4}{2n^3+5n-1}$; 01.21 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^3-2n+1}{3n^2+4n+2}$;

01.22 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3-8n^2+12n-18}{n^3-3n^2-9n+27}$; 01.23 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n}{\sqrt{n+10}-\sqrt{n-10}}$; 01.24 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n-5}-\sqrt{3+n}}{n(1-n)}$;

01.25 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4n^2+7n+3}{2n^2+n-1}$; 01.26 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n+9}-\sqrt{n-9}}{n(n+6)}$; 01.27 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2-7n+1}{3n^2+n+3}$;

01.28 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4n^2+7n+3}{2n^2+n-1}$; 29.01 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2-9}{\sqrt{n^4-81}}$; 01.30 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n^3+2n^2+n}}{n+1}$.

II) Найти значения пределов функций

02.01 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3}{5x^2+1}-\dfrac{3x^2}{15x+1}\right)$; $\lim\limits_{x\to\pi/2}\left[\dfrac{1}{\cos(x)}-tg(x)\right]$;

02.02 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(8x)}{3x}$; $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x^2-7}-3}{x^2-4x}$; $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3-x^2-21x+45}{x^3-3x^2-9x+27}$;

02.03 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x+2}{4x-5}\right)^{4-x^2}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3+5x^2+6}{2x^2+3x}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-3x+1}{3x^2+x+4}$;

02.04 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2-5x-2}{2x^2-x-6}$; $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2-\sqrt{x}}{\sqrt{6x+1}-5}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos(6x)}{1-\cos(4x)}$;

02.05 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-3}{2x+5}\right)^{x-1}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2-2x+1}{2x^2+x-3}$; $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{2x^2+15x+25}{5-4x-x^2}$;

02.06 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+2}{3x-4}\right)^{2-x}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(3x)+\sin(5x)}{6x}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{9+x}-\sqrt{9-x}}{x^2+6x}$;

02.07 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3-2x-x^2}{x^2+4x+1}$; $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{4x^2+7x+3}{2x^2+x-1}$; $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x-3}{\sqrt{8+x}-3}$;

02.08 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{10x^2}{1-\cos(x)}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x+3}{4x-1}\right)^{2x-3}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-5x+4}{x^3-x+1}$;

02.09 $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x^2-9x+9}{x^2-5x+6}$; $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{5-x}-\sqrt{3+x}}{x-x^2}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x\cdot tg(x)}{\sin^2(x)}$;

02.10 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+5}{2x-1}\right)^{3-x}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+x-4}{3+x-4x^2}$; $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{5x-x^2-4}{x^2-2x-8}$;

02.11 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot tg(x)}{1-\cos(x)}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{7+x}-\sqrt{7-x}}{5x}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x-1}{5x+4}\right)^{2x+1}$;

02.12 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-7x+1}{3x^2+x+3}$; $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-2x-8}{2x^2+5x+2}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4+x}-\sqrt{4-x}}{3x^2+x}$;

02.13 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+5x+4}{2x^2-x+1}$; $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{3x^2-2x-1}{x^2-4x+3}$; $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos(x)-\cos^5(x)}{4x^2}$;

02.14 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{4x^2}{1-\cos(4x)}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x}{2x-3}\right)^{4x+1}$; $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{\sqrt{x^2-7}-3}{x^2-4x}$;

02.15 $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{4-x}{x^2-16}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3-2x+1}{3x^2+4x+2}$; $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{3x-3}{\sqrt{8+x}-3}$;

02.16 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{8x^2}{\sin^2(5x)}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x+1}{4x-3}\right)^{1-2x}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5-2x-3x^2}{x^2+x+3}$;

02.17 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{tg^2(3x)}{10x^2}$; $\lim\limits_{x\to5}\left[\dfrac{x}{2}\sqrt{25-x^2}+\arccos\left(\dfrac{x}{5}\right)\right]$; $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-1}{5x^2-4x-1}$;

02.18 $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2+2x-8}{8-x^3}$; $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2+2x-8}{8-x^3}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x-2}{5x+3}\right)^{3-2x}$;

02.19 $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{6-x-x^2}{3x^2+8x-3}$; $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2x}{\sqrt{10+x}-\sqrt{10-x}}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-2}{x+3}\right)^{4-x}$;

02.20 $\lim\limits_{x\to0}x^3\cdot\ln(x)$; $\lim\limits_{x\to0}x^2\cdot ctg^2(3x)$; $\lim\limits_{x\to\pi}\ln\left[ctg\left(\dfrac{x}{2}\right)\right]$;

02.21 $\lim\limits_{x\to\pi/4}\dfrac{\cos(2x)}{1-tg(x)}$; $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-e^{2x}}{\ln(1-2x)}$; $\lim\limits_{x\to\pi/6}\dfrac{1-2\sin(x)}{1-\sqrt{3}\,tg(x)}$;

02.22 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1-x^2}{\ln(x)}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}+\arccos\left(\dfrac{1}{x^2}\right)\right]$; $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin(x)}$;

02.23 $\lim\limits_{x\to\infty}x^2\cdot e^{-2x}$; $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{e^x-1}-\dfrac{1}{x}\right)$; $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x+\ln(1+x)}{e^x-1}$;

02.24 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\ln(1-x)}$; $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos(x)-1}{\sqrt{\sin^3(4x)}}$; $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin(2x)}{1-\cos(2x)}$;

02.25 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1-x^3}{\sqrt{1-x^6}}$; $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+x^2\right)}{x}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1-x^3}{\sqrt{1-x^6}}$;

02.26 $\lim\limits_{x\to -1}\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt[3]{1+x^3}}$; $\lim\limits_{x\to 0} x\cdot tg\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$; $\lim\limits_{x\to\infty} x\cdot e^{-x}$;

02.27 $\lim\limits_{x\to\infty} x^2\cdot e^{-3x}$; $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\cos(x)+1}{\sqrt{\sin^3(x)}}$; $\lim\limits_{x\to\pi/2}\frac{x-\pi/2}{\sin(x+\pi/2)+\cos(x)}$;

02.28 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{x}}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^2+7x+3}{2x^2+x-1}$; $\lim\limits_{x\to -1}\frac{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt[6]{x}-1\right)}{\sqrt[3]{x}+1}$;

02.29 $\lim\limits_{x\to 0} x\ln(x)$; $\lim\limits_{x\to e^{-3}}\frac{\sqrt{3+\ln(x)}}{12+4\ln(x)}$; $\lim\limits_{x\to 3} arctg\left[\ln\left(x^2+6x-26\right)\right]$;

02.30 $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x^4-81}$; $\lim\limits_{x\to\pi/2}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\cdot tg(x)$; $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^3+2x^2+x}{x+1}$.

III) Задана функция $y=f(x)$. Установить, является ли данная функция непрерывной. В случае разрыва функции найти её пределы слева и справа, а также классифицировать характер разрыва. Изобразить схематично график функции.

03.01 $f(x)=\begin{cases} x+4, & x<-1 \\ x^2+2, & -1\le x<1; \\ 2x, & x\ge 1 \end{cases}$

03.02 $f(x)=\begin{cases} x+2, & x\le -1 \\ x^2+1, & -1\le x\le 1; \\ -x+3, & x>1 \end{cases}$

03.03 $f(x)=\begin{cases} -x, & x\le 0 \\ -(x-1)^2, & 0<x<2; \\ x-3, & x\ge 1 \end{cases}$

04.03 $f(x)=\begin{cases} \cos(x), & x\le 0 \\ x^2+1, & 0<x<1; \\ x, & x\ge 1 \end{cases}$

03.05 $f(x)=\begin{cases} -x, & x\le 0 \\ x^2, & 0<x\le 2; \\ x+1, & x>2 \end{cases}$

03.06 $f(x)=\begin{cases} -x, & x\le 0 \\ \sin(x), & 0<x\le \pi; \\ x-2, & x>\pi \end{cases}$

03.07 $f(x)=\begin{cases} -(x+1), & x\le -1 \\ (x+1)^2, & -1<x\le 0; \\ x, & x>0 \end{cases}$

03.08 $f(x)=\begin{cases} -x^2, & x\le 0 \\ tg(x), & 0<x\le \pi/4; \\ 2, & x>\pi/4 \end{cases}$

03.09 $f(x)=\begin{cases} -2x, & x\le 0 \\ x^2+1, & 0<x\le 1; \\ 2, & x>1 \end{cases}$

03.10 $f(x)=\begin{cases} -2x, & x\le 0 \\ \sqrt{x}, & 0<x<1; \\ 1, & x\ge 1 \end{cases}$

11 $f(x)=\begin{cases} \cos(x), & x\le 0 \\ x^2+1, & 0<x\le 1; \\ x, & x\ge 1 \end{cases}$

03.12 $f(x)=\begin{cases} x+1, & x\le 0 \\ (x+1)^2, & 0<x<1; \\ (x+1)^3, & x\ge 1 \end{cases}$

03.13 $f(x)=\begin{cases} x-4, & x<-2 \\ x^2+2, & -2\le x<1; \\ 2x+3, & x\ge 1 \end{cases}$

03.14 $f(x)=\begin{cases} x-8, & x\le 0 \\ x^2-3, & 0\le x\le 2; \\ 5-x^2, & x>2 \end{cases}$

03.15 $f(x)=\begin{cases} \sin(x), & x\le \pi/4 \\ \cos(x), & \pi/4<x<\pi; \\ x, & x\ge \pi \end{cases}$

03.16 $f(x)=\begin{cases} -x, & x\le 0 \\ -(x+1)^2, & 0<x<2; \\ x+3, & x\ge 1 \end{cases}$

03.17 $f(x)=\begin{cases} x^3, & x\le 0 \\ x^2, & 0<x\le 3; \\ x+1, & x>3 \end{cases}$

03.18 $f(x)=\begin{cases} -x, & x\le 0 \\ tg(x), & 0<x\le \pi/4; \\ x-2, & x>\pi/4 \end{cases}$

03.19 $f(x)=\begin{cases} (x+1), & x\le -1 \\ (x+1)^3, & -1<x\le 2; \\ x^3, & x>2 \end{cases}$

03.20 $f(x)=\begin{cases} -x^2, & x\le 0 \\ \sin(x), & 0<x\le \pi/2; \\ 2, & x>\pi/2 \end{cases}$

03.21 $f(x)=\begin{cases} (x+1)^2, & x\le -1 \\ 5x, & -1<x\le 0; \\ \cos(x), & x>0 \end{cases}$

03.22 $f(x)=\begin{cases} 2x, & x\le 0 \\ \sqrt[3]{x+1}, & 0<x<1; \\ 2, & x\ge 1 \end{cases}$

03.23 $f(x)=\begin{cases} x-2, & x\le 0 \\ (x-2)^4, & 0<x<1; \\ \sqrt{x-2}, & x\ge 1 \end{cases}$ 03.24 $f(x)=\begin{cases} tg(x), & x\le 0 \\ \sin(x), & 0<x\le \pi/2\ ; \\ x, & x>\pi/2 \end{cases}$

03.25 $f(x)=\begin{cases} tg(x), & x\le \pi/4 \\ (4+x)/\pi, & \pi/4<x<5; \\ 8x, & x\ge 5 \end{cases}$ 03.26 $f(x)=\begin{cases} \sin(x), & x\le \pi/6 \\ (6+5x)/\pi, & \pi/6<x<7; \\ 11x, & x\ge 7 \end{cases}$

03.27 $f(x)=\begin{cases} (2x+1)^2, & x\le 1 \\ \sqrt{x+80}, & 1<x\le 3; \\ (x+1)^2, & x>3 \end{cases}$ 03.28 $f(x)=\begin{cases} 2-x, & x\le 0 \\ 7x+2, & 0<x\le 4; \\ (x-5)^2, & x>4 \end{cases}$

03.29 $f(x)=\begin{cases} (x+1), & x\le -1 \\ \sqrt{x+1}, & -1<x\le 2; \\ \ln(x^3), & x>2 \end{cases}$ 03.30 $f(x)=\begin{cases} 1/(x-1), & x\le 0 \\ (x-1)^2, & 0<x\le 4. \\ 9x+4, & x>4 \end{cases}$

IV) Вычислить производные и дифференциалы первых двух порядков от следующих функций

04.01 $y(x)=\cos(\sqrt{x})$; $y(x)=ln[ctg(x/2)]$;

04.02 $y(x)=x\sqrt{25-x^2}+12\cos(x/5)$; $x(t)=t(2t+1)$, $y(t)=ln(t)$;

04.03 $y(x)=x\sqrt{25-x^2}+12\cos(x/5)$; $x(t)=cos(t)$, $y(t)=sin(t)$;

04.04 $y(x)=\exp(2x)\cdot ctg(2x)$; $x(t)=1-t^2$, $y(t)=(2+t^2)/t^2$;

04.05 $y(x)=\frac{1}{6}\ln\left(\frac{x-3}{x+3}\right)$; $y(x)=\frac{1-\cos(3x)}{1+\cos(3x)}$;

04.06 $y(x)=tg(3x)\cdot e^{5x}$; $x(t)=ln(t)$, $y(t)=exp(3t)$;

04.07 $y(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$; $x(t)=t(t+5)$, $y(t)=t(t^4+2t)$;

04.08 $x(t)=3t^2, y(t)=6t^4$; $y(x)=exp[cos(3x)]$;

04.09 $y(x)=(x-1)\cdot\exp(-x^2)$; $x(t)=t, y(t)=t^2$;

04.10 $y(x)=\ln\left(\sqrt{x}-\sqrt{x-2}\right)+\sqrt{x^2-2x}$; $y(x)=\cos\left(\frac{1}{x^2}\right)+\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$;

04.11 $y(x)=ln[sin(x)]+ctg^2(x)$; $y(x)=ln[cos(2x)]+ln[sin(2x)]$;

04.12 $y(x)=3x\cdot exp(-x^{-2})$; $x(t)=t^2(1-t), y(t)=2t^3$;

04.13 $y(x)=ctg^2(3x)$; $x(t)=t^3, y(t)=t^6$;

04.14 $y(x)=\cos\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$; $x(t)=3sin(t), y(t)=3cos^2(t)$;

04.15 $y(x)=x\cdot exp(x^{-1})$; $x(t)=t(2-t), y(t)=2t^2$;

04.16 $y(x)=\ln\left(\sqrt{x+2}\right)$; $y(x)=tg^3(x)+ctg^2(x)+\ln[\sin(x)]$;

04.17 $y(x)=\frac{\sqrt{7+x}-\sqrt{7-x}}{5x}$; $y(x)=tg(x)-\frac{1}{\cos(x)}$;

04.18 $y(x)=\frac{x^3}{5x^2+1}-\frac{3x^2}{15x+1}$; $y(x)=\frac{\sin(8x)}{3x}$;

04.19 $y(x)=\frac{\sqrt{x^2-7}-3}{x^2-4x}$; $y(x)=\frac{x^3-8x^2+12x-18}{x^3-3x^2-9x+27}$;

04.20 $y(x)=3x\cdot tg(x)$; $y(x)=[sin(x)+sin(5x)]/6x$;

21.04 $y(x)=\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$; $y(x)=\frac{2-\sqrt{x}}{\sqrt{6x+1}-5}$;

04.22 $y(x)=\frac{\sqrt{9+x}-\sqrt{9-x}}{x(x+6)}$; $y(x)=\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin(x)}$;

04.23 $y(x)=\dfrac{10x^2}{1-\cos(x)}$; $y(x)=\dfrac{4x^2+7x+3}{2x^2+x-1}$;

04.24 $y(x)=\dfrac{3(x-1)}{\sqrt{8+x}-3}$; $y(x)=\dfrac{\sqrt{5-x}-\sqrt{3+x}}{x(1-x)}$;

04.25 $y(x)=\dfrac{x^3-8x^2+12x-18}{x^3-3x^2-9x+27}$; $y(x)=\dfrac{x\cdot tg(x)}{1-\cos(x)}$;

04.26 $y(x)=\dfrac{x^2-7x+1}{3x^2+x+3}$; $y(x)=\dfrac{\sqrt{4+x}-\sqrt{4-x}}{3x^2+x}$;

04.27 $y(x)=\dfrac{\cos(x)-\cos^5(x)}{4x^2}$; $y(x)=\dfrac{4x^2}{1-\cos(4x)}$;

04.28 $y(x)=\dfrac{2x^3-2x+1}{3x^2+4x+2}$; $y(x)=\dfrac{3x-3}{\sqrt{8+x}-3}$;

04.29 $y(x)=\dfrac{8x^2}{\sin^2(5x)}$; $y(x)=\dfrac{tg^2(3x)}{10x^2}$;

04.30 $y(x)=[1-cos(x)]/2x^2$; $y(x)=x^2ctg^2(3x)$.

V) Вычислить приближённые значения первых функций, рассмотренных в задании IV, в точке $f(x+0{,}01)$.

VI) Методами дифференциального исчисления: (i) исследовать функцию $y=f(x)$ и построить её график; (ii) найти наибольшее и наименьшее значения функции $y=f(x)$.

06.01 $y(x)=\dfrac{4x}{4+x^2}$; 06.02 $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$;

06.03 $y(x)=\dfrac{x^2}{x+1}$; 06.04 $y(x)=\dfrac{x^2-5}{x-3}$;

06.05 $y(x)=\frac{2-4x}{1-4x}$;

06.06 $y(x)=\frac{x-3}{x+9}$;

06.07 $y(x)=x^{0,5}\cdot ln(x)$;

06.08 $y(x)=(e^{3x}-e^{-3x})/2$;

06.09 $y(x)=x\cdot exp(x^2)$;

06.10 $y(x)=(x-1)\cdot e^{3x}$;

06.11 $y(x)=x^2\cdot e^{2x}$;

06.12 $y(x)=x\cdot e^x$;

06.13 $y(x)=tg\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$;

06.14 $y(x)=\frac{x^2-4}{x+4}$;

06.15 $f(x)=\frac{(x+3)^2}{x+2}$;

06.16 $f(x)=\left(\frac{x+2}{x+1}\right)^2$;

06.17 $y(x)=\frac{6-x-x^2}{8x-3}$;

06.18 $f(x)=\frac{2x}{x^2-4}$;

06.19 $f(x)=x+4/x^2$;

06.20 $y(x)=1-\cos(4x)$;

06.21 $y(x)=\frac{3}{x^2-4x}$;

06.22 $y(x)=3\frac{x-1}{8+x}e^x$;

06.23 $y(x)=\frac{7e^x}{5x}$;

06.24 $y(x)=\frac{5x-4}{x^2-2x-8}$;

06.25 $f(x)=\frac{2-4x^2}{1-4x^2}$;

06.26 $f(x)=\frac{3}{x^2+8}$;

06.27 $y(x)=\frac{5-x}{x-x^2}$;

06.28 $f(x)=\frac{2x^3}{x^2-4}$;

06.29 $y(x)=\frac{x^2}{x+1}$;

06.30 $f(x)=\frac{x^2+x+1}{x-4}$.

ЛИТЕРАТУРА

Основная литература

1. Шилов, Г.Е. Математический анализ / Г.Е. Шилов. - М.: Издательство “Лань”, 2015. 912 с.

2. Фихтенгольц, Г.М. Основы математического анализа (в двух томах) / Г. М. Фихтенгольц. - М.: Издательство “Лань”, 2015. 912 с.

Дополнительная литература

1. Кремер, Н.Ш. Высшая математика для экономистов / Н.Ш. Кремер. - М.: Юнити, 2008. 480 с.

2. Минорский В.П. Сборник задач по высшей математике / В.П. Минорский. М.: Издательство Физико-математической литературы, 2004. 336 с.

3. Шипачев В.С. Сборник задач по высшей математике / В.С. Шипачев. М.: Издательство Физико-математической литературы, 2005. 336 с.

Евгений Леонидович **Панкратов**
Елена Алексеевна **Булаева**

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Учебно-методическое пособие

Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего профессионального образования
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского».
603950, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23.